Optimization and approximation on systems of geometric objects

van Leeuwen, E.J.

Samenvatting

Praktische problemen in bijvoorbeeld draadloze netwerken, computationele biologie of cartografie kunnen vaak gemodelleerd worden door een optimaliseringsprobleem op een systeem van geometrische objecten te definiëren. Veel optimaliseringsproblemen zijn NP-moeilijk om exact op te lossen en soms ook bewijsbaar moeilijk te benaderen. Echter, als de onderliggende structuur van het optimaliseringsprobleem een systeem van geometrische objecten is, dan blijkt het probleem meestal makkelijk exact op te lossen of goed te benaderen. Dit proefschrift onderzoekt de benaderbaarheid van moeilijke optimaliseringsproblemen op systemen van geometrische objecten. In het bijzonder bekijkt het wat de invloed van de vorm van de objecten op de benaderheid is.

De belangrijkste structuur over systemen van geometrische objecten die we tijdens dit onderzoek beschouwen is de intersectiegraaf van de gegeven objecten, een geometrische intersectiegraaf genoemd. Iedere knoop in deze graaf correspondeert met een object en er is een kant tussen twee knopen dan en slechts dan als de corresponderende objecten een niet-lege doorsnede hebben. Het bekendste voorbeeld hiervan zijn schijfintersectiegrafen (disk graphs), die vaak als model voor draadloze netwerken worden gebruikt. Verscheidene klassieke optimaliseringsproblemen, zoals Maximum Independent Set, Minimum Vertex Cover, and Minimum (Connected) Dominating Set, zijn relevant in deze context. Wat betreft de benaderbaarheid van deze problemen op geometrische intersectiegrafen concluderen we het volgende.

Als een verzameling van n schijven van gelijke grootte (eenheidsschijven) gegeven is, waarvan de dichtheid (density) d is, dan kan voor ieder van de bestudeerde problemen in $d^{O(1/\epsilon)}n^{O(1)}$ tijd een $(1+\epsilon)$-benadering van het optimum gevonden worden. Dit resulteert in een eptas als $d = d(n) = n^{o(1)}$ en een ptas in het algemeen. Voor Minimum Vertex Cover kunnen we het algoritme zelfs versterken tot een eptas in het algemene geval. Deze schema's zijn uitbreidbaar tot intersectiegrafen van gelijke grote dikke objecten in constante dimensie. Voorts kan worden aangetoond dat er, op constantes na, geen sneller algoritme is om een $(1+\epsilon)$-benadering te vinden, tenzij de exponential time hypothesis onwaar is. Behalve voor Minimum Vertex Cover is er ook geen eptas voor de problemen als $d = d(n) = n^{\alpha}$ voor een willekeurige constante $\alpha > 0$, tenzij FPT = W[1]. Dit is een sterke indicatie dat de ontworpen schema's optimaal zijn.

De benaderingsschema's zijn voor Maximum Independent Set and Minimum Vertex Cover uit te breiden tot intersectiegrafen van willekeurig grote schijven. We krijgen een eptas als de level density $d = d(n) = n^{o(1)}$ is, een ptas in het algemeen en voor Minimum Vertex Cover zelfs een eptas in het algemene geval. De schema's werken ook op intersectiegrafen van dikke objecten in constante dimensie. We kunnen net als voor eenheidsschijfintersectiegrafen aantonen dat deze schema's optimaal zijn op constantes na.

Bekijken we echter Minimum (Connected) Dominating Set, dan blijkt dit probleem een stuk lastiger te worden op intersectiegrafen van objecten van willekeurige grootte. Zijn de objecten willekeurig geschaalde en getransleerde kopieën van een convexe veelhoek, dan is er een constante-factor-benaderingsalgoritme, het eerste benaderingsalgoritme voor dit probleem dat beter is dan de $\ln n$-benadering van het greedy algoritme. Uitbreiding naar schijfintersectiegrafen is niet direct mogelijk, omdat de constante in de benaderingsfactor van het algoritme afhangt van de complexiteit van de veelhoek. Wordt ieder punt van het vlak echter maar door een begrensd aantal schijven overlapt, dan kan in polynomiale tijd een $(3+\epsilon)$-benadering gevonden worden (voor vaste $\epsilon > 0$). Dit werkt ook voor intersectiegrafen van dikke objecten in constante dimensie. Is het aantal objecten dat een bepaald punt overlapt niet begrensd en wijkt de vorm van de objecten maar iets af van de vorm van een schijf (maar is nog steeds dik), dan kan aangetoond worden dat het probleem niet beter dan een $\ln n$-benaderingsalgoritme heeft, tenzij $\mathrm{NP} \subset \mathrm{DTIME}(n^{\mathrm{O}(\log\log n)})$.

Een ander belangrijk probleem om te beschouwen is de geometrische versie van het bekende minimum set cover probleem en enkele van z'n varianten. Zij gegeven een verzameling geometrische objecten en een verzameling punten in het vlak, dan dient bij dit probleem een zo klein mogelijke deelverzameling van de objecten gevonden te worden die alle punten overdekken. Zijn de objecten vierkanten van gelijke grootte, dan geven wij een ptas voor dit probleem, een van de eerste ptas-en voor dit probleem in twee dimensies en de eerste die ook in het gewogen geval werkt.

Als we een deelverzameling van de objecten willen waarbij zoveel mogelijk gegeven punten door precies één object overdekt wordt, dan hebben we een algoritme dat een 1/18-benadering geeft als de objecten eenheidsschijven zijn en een 1/2-benadering als de objecten eenheidsvierkanten zijn. Als de objecten verschillende grootte hebben en dik zijn, dan hebben is er een eptas als ieder punt in het vlak maar door een begrensd aantal objecten overlapt wordt. Is dit aantal niet begrensd, dan is het wederom zo dat het probleem niet beter dan een $\ln n$-benaderingsalgoritme heeft.

Alle drie de bovenstaande algoritmen zijn uitbreidbaar is tot het geval waarbij ieder object een prijs heeft, ieder punt een opbrengst en we de totale opbrengst van (enkelvoudig) overdekte punten willen maximaliseren zodanig dat de totale kosten binnen een bepaald budget vallen.

De voornaamste conclusie van het onderzoek is dat bekende optimaliseringsproblemen op systemen van geometrische objecten vaak beter benaderbaar zijn dan op algemene systemen. We hebben echter laten zien dat het type van de objecten van grote invloed is op de benaderbaarheid. In het bijzonder lijken problemen als Minimum Dominating Set, Minimum Set Cover en enkele van z'n varianten lastiger op een systeem van schijven dan op een systeem van (zeg) vierkanten. Verder onderzoek naar dit fenomeen vormt een nieuwe uitdaging.