



UvA-DARE (Digital Academic Repository)

Bifurcations of indifference points in discrete time optimal control problems

Moghayer, S.M.

[Link to publication](#)

Citation for published version (APA):

Moghayer, S. M. (2012). *Bifurcations of indifference points in discrete time optimal control problems*. Amsterdam: Thela Thesis.

General rights

It is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), other than for strictly personal, individual use, unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

Disclaimer/Complaints regulations

If you believe that digital publication of certain material infringes any of your rights or (privacy) interests, please let the Library know, stating your reasons. In case of a legitimate complaint, the Library will make the material inaccessible and/or remove it from the website. Please Ask the Library: <https://uba.uva.nl/en/contact>, or a letter to: Library of the University of Amsterdam, Secretariat, Singel 425, 1012 WP Amsterdam, The Netherlands. You will be contacted as soon as possible.

Samenvatting

In dit proefschrift wordt een klasse van autonome discrete-tijd oneindige-horizon optimale besturingsproblemen met niet-convexe toestandsdynamica bestudeerd. Methodologisch draagt dit proefschrift bij aan de meetkundige of ‘faseruimte’ analyse van dit soort problemen. In tegenstelling tot het geval waar tijd continu is, is deze aanpak niet bijzonder populair in het discrete-tijd geval. De belangrijkste reden hiervoor lijkt te zijn dat een aantal krachtige instrumenten uit de continue-tijd theorie niet beschikbaar zijn.

In hoofdstuk 2 worden de noodzakelijke eerste-orde voorwaarden van deze klasse van optimale besturingsproblemen geformuleerd in termen van een randwaardeprobleem van de bijbehorende fase-afbeelding φ . Als deze afbeelding beschikt over een zadelpunt, dan zijn alle banen op de stabiele variëteit een oplossing van het randwaardeprobleem. In het geval met meerdere zadelpunten waarvan de projecties van de stabiele variëteiten op de toestandsruimte elkaar overlappen, of in het geval dat verschillende punten van één stabiele variëteit op hetzelfde punt in de toestandsruimte worden geprojecteerd, worden de waarden van de banen vergeleken die in deze punten beginnen. Het hoofdstuk geeft een aantal resultaten die deze vergelijking mogelijk maken.

Systemen waarin de faseafbeelding φ een uniek zadelpunt heeft, worden op veel plaatsen aangetroffen in de economische literatuur (bijv. Ramsey (1928)). Meestal komt in deze systemen het zadelpunt overeen met een dekpunt van de optimale dynamica, welk zodanig is dat alle oplossingen, ongeacht de oorspronkelijke toestand van het systeem, naar dit dekpunt toegaan. Wanneer er meer dan één zadelpunt aanwezig is (vgl. Dechert and Nishimura (1983)), of wanneer er een tweede optimale baan is die naar oneindig gaat (vgl. Hinloopen et al. (2011)), dan is de oplossingstructuur ingewikkelder. Indien in het geval met twee zadelpunten beide corresponderen met een dekpunt van de optimale dynamica, dan is er een onverschilligheidsdrempel (Skibapunt) die de begintoestand is van twee verschillende optimale banen.

In vergelijkbare continue-tijd problemen hangt het bestaan van Skibapunten af van de relatieve positie van de stabiele en onstabiele variëteiten van de zadeldekpunten van de fasedynamica. In het bijzonder wordt de bifurcatie waarin een onverschilligheidsdrempel ontstaat gekenmerkt door het optreden van een heterocliene verbinding, waarbij de stabiele variëteit van een zadeldekpunt samenvalt met de instabiele variëteit van een andere zadel. In hoofdstuk 3 is aangetoond dat in discrete-tijd problemen de situatie analoog is, maar complexer, als gevolg van het feit dat in tegenstelling tot het continue-tijd geval stabiele en onstabiele variëten niet automatisch samenvallen als ze eenmaal een enkel punt gemeen hebben. In het hoofdstuk wordt gepreciseerd hoe het ontstaan van onverschilligheidpunten in een zogenaamde onverschilligheid-attractor bifurcatie gekoppeld is aan het optreden van heterocliene bifurcaties van de familie van fase-afbeeldingen φ , en wat voor gevolgen dit heeft voor de optimale oplossingen. In het bijzonder wordt de bi-

furcatiewaarde waarvoor de onverschilligheidsdrempel verschijnt gekenmerkt door een meetkundige voorwaarde. Bovendien wordt er aangetoond dat er op moment van bifurcatie oneindig veel onverschilligheidspunten optreden die geen onverschilligheidsdrempels zijn.

In de meeste toepassingen is het onmogelijk om analytische uitdrukkingen voor invariante variëteiten te bepalen en zijn er numerieke methoden nodig: deze worden besproken in hoofdstuk 4. Een eenvoudig algoritme wordt beschreven om numeriek invariante variëteiten te berekenen. Deze informatie wordt gebruikt om de locus van de onverschilligheid-attractor bifurcatiepunten te bepalen.

De resultaten en methoden ontwikkeld in dit proefschrift worden toegepast op het probleem van het beheer van verontreinigde meren (Mäler et al. (2003)). In ecologische systemen, zoals meren, kunnen interne positieve terugkoppelingen leiden tot catastrofale verschuivingen in het vervuilingsniveau. De economische afweging van een beleidsmaker in dit geval vergelijkt de voordelen van landbouwactiviteiten, die verantwoordelijk zijn voor de vervuiling van het meer, en de kosten van de vervuiling.

In hoofdstuk 5 wordt een bifurcatieanalyse van dit model uitgevoerd. Het resulterende bifurcatiediagram geeft een overzicht van het gezamenlijke effect van de (fysieke) robuustheid van het meer en het (economische) belang van het meer op de vorm van het optimale beleid. Het diagram is verdeeld in vier parametergebieden: *uniek dekpunt*, *geringe vervuiling*, *hoge vervuiling*, en *begintoestandaafhankelijkheid*. In het eerste gebied is er een uniek zadelpunt van de fase-afbeelding dat overeenkomt met een globale aantrekker van de optimale toestanddynamica. In de andere gebieden heeft de fase-afbeelding twee

zadelpunten die corresponderen met een schoon of een vervuild mogelijk dekpunt van de toestanddynamica. Zowel het schone als het vervuilde mogelijke dekpunt kan een globale aantrekker zijn: in dat geval wordt het alternatieve mogelijke dekpunt niet gerealiseerd door de optimale dynamica. Het is ook mogelijk dat beide dekpunten gerealiseerd worden; dan correspondeert elk met een lokale attractor. Deze parametergebieden worden gescheiden door onverschilligheid-attractor- en zadelknoop-bifurcatiekrommen.

In het *geringe vervuiling* gebied, dat gekenmerkt wordt door een hoge robuustheid en groot economisch belang van het meer, stuurt het optimale beleid het meer altijd naar het schone dekpunt, onafhankelijk van de oorspronkelijke toestand. In het *hoge vervuiling* gebied, waar het economische belang van het meer relatief laag is, zal het vervuilde dekpunt uiteindelijk bereikt worden onder optimaal beheer ongeacht de oorspronkelijke toestand. Voor meren in het *begintoestandaafhankelijke* gebied - meren die fragiel zijn en van gemiddeld tot hoog economisch belang vallen onder deze categorie - is het resultaat van een optimaal beleid afhankelijk van de begintoestand: als het initiële vervuilingsniveau voldoende laag is, wordt het schone dekpunt bereikt, anders het vervuilde. De twee gebieden in de toestandsruimte worden gescheiden door een onverschilligheidspunt.

In hoofdstuk 5 wordt ook de 'stijfheid' of reactiesnelheid van het meer gevarieerd. Een sterk-reagerend meer vertoont meer plotselinge verschuivingen tussen schone en vervuilde regimes. Het is gebleken dat voor een sterk-reagerend meer het gebied met *hoge vervuiling* veel kleiner is vergeleken met een zwak-reagerend meer, terwijl het gebied met *lage vervuiling* veel groter is. Dat wil zeggen, het is optimaal een regimeverschuiving in de richting van het vervuilde evenwicht te vermijden als het meer een laag economisch belang

heeft, maar sterk reageert. In het beheer van sterk reagerende ecosystemen is het waarschijnlijker dat het optimale beleid 'groen' is.