



UvA-DARE (Digital Academic Repository)

Grothendieck inequalities, nonlocal games and optimization

Briët, J.

Publication date
2011

[Link to publication](#)

Citation for published version (APA):

Briët, J. (2011). *Grothendieck inequalities, nonlocal games and optimization*. [Thesis, fully internal, Universiteit van Amsterdam]. Institute for Logic, Language and Computation.

General rights

It is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), other than for strictly personal, individual use, unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

Disclaimer/Complaints regulations

If you believe that digital publication of certain material infringes any of your rights or (privacy) interests, please let the Library know, stating your reasons. In case of a legitimate complaint, the Library will make the material inaccessible and/or remove it from the website. Please Ask the Library: <https://uba.uva.nl/en/contact>, or a letter to: Library of the University of Amsterdam, Secretariat, P.O. Box 19185, 1000 GD Amsterdam, The Netherlands. You will be contacted as soon as possible.

Samenvatting

Gemotiveerd door toepassingen in de kwantuminformatietheorie en optimalisatie introduceren we nieuwe varianten van de beroemde *Grothendieck ongelijkheid*. In de kwantuminformatietheorie passen we deze wiskundige gereedschappen toe in de studie van de meest verrassende en merkwaardige voorstelling van de kwantummechanica: *verstrengeling*. In optimalisatie gebruiken we ze om de nauwkeurigheid te bepalen van efficiënte approximatie algoritmen voor geometrische problemen die op natuurlijk wijze voortkomen uit de studie van verstrengeling en uit modellen voor interacterende deeltjes die beschouwd worden in de klassieke statistische fysica.

In dit proefschrift wordt verstrengeling bestudeert met behulp van *non-lokale spellen*. Een nonlokaal spel wordt gespeeld door twee of meer deelnemers die niet met elkaar mogen communiceren, maar wel in contact staan met een scheidsrechter. Als het spel begint vraagt de scheidsrechter aan elke deelnemer een vraag, waarna ze hem elk een antwoord terugsturen. De scheidsrechter bepaalt vervolgens of de deelnemers winnen of verliezen op basis van enkel de gestelde vragen en verkregen antwoorden. De deelnemers weten van tevoren welke antwoorden nodig zijn om het spel te winnen; dat is natuurlijk het doel. Het probleem is dat een deelnemer alleen de vraag kent die direct aan hem gesteld is en niet de vragen die aan de andere deelnemers gesteld zijn. De deelnemers spelen dus niet tegen elkaar, maar moeten juist proberen hun strategieën te coördineren.

In een wereld waar de wetten van de klassieke mechanica gelden is de beste strategie voor een nonlokaal spel altijd de meest voor de hand liggende: bepaal vooraf de antwoorden op alle mogelijke vragen. In een kwantummechanische wereld daarentegen, kunnen meer ingewikkelde strategieën soms een beter

resultaat geven. Elke deelnemer kan zijn antwoord laten afhangen van de uitkomst van een natuurkundig experiment. De onderscheidende eigenschap van een dergelijke handelwijze is dat het de deelnemers kunnen produceren die *gecorrleerd* zijn op een manier die onmogelijk is in een klassieke wereld. In dat geval zijn de deelnemers *verstrengeld*.

Het feit dat de kwantummechanica het bestaan van zo'n fenomeen voorspelt, werd in 1935 door Einstein, Podolski en Rosen gebruikt om te beargumenteren dat deze theorie niet compleet zou kunnen zijn. Volgens hen zou verstrengeling geen deel uit moeten maken van een redelijke beschrijving van de natuur. Verrassend genoeg gaven experimenten van Aspect et al. uit de jaren '80 overtuigend bewijs dat de wereld waarin wij leven wel degelijk zulke effecten toestaat!

Optimalisatie betekent het doorzoeken van een doorgaans grote verzameling met als doel een element met de beste eigenschappen te vinden. Een voorbeeld daarvan is het vinden van een strategie voor een nonlokaal spel waarmee de deelnemers de grootste kans hebben om te winnen. Een ander voorbeeld is het oriënteren van de magnetische velden van interacterende deeltjes, zodat de energie van het systeem dat deze vormen minimaal is.

De optimalisatieproblemen die het meest bestudeerd worden zijn van een combinatorisch type. Voorbeelden zijn het vinden van een optimale klassieke strategie voor een nonlokaal spel, maar ook het minimaliseren van de energie van een verzameling deeltjes in het Ising-model uit de klassieke statistische mechanica. Beide vergen een zoektocht over een discrete verzameling mogelijkheden. In dit proefschrift beschouwen we optimalisatieproblemen van een meer *geometrisch* type. Een typisch voorbeeld hiervan is het zoeken van een optimale verdeling van een eindig aantal punten op het oppervlak van een driedimensionale bal. Deze geometrische optimalisatieproblemen vloeien op natuurlijke wijze voort uit de studie van verstrengeling wanneer men de mate van verstrengeling beperkt die gebruikt mag worden door deelnemers van een nonlokaal spel. Deze problemen komen ook voort uit het Heisenberg-model van interacterende deeltjes, welk model ook gebruikt wordt in klassieke statistische fysica.

De meeste van die hiervoor beschreven problemen kunnen waarschijnlijk door geen enkele computer binnen een redelijke hoeveelheid tijd precies worden opgelost. Als tijd een belangrijke rol speelt, dan is het beste alternatief om te zoeken naar een zo goed mogelijke oplossing die snel gevonden kan worden. We gebruiken nieuwe varianten van Grothendiecks ongelijkheid in de

analyse van algoritmen voor de hiervoor beschreven geometrische problemen die precies zo een alternatief bieden.