UNIVERSITY OF AMSTERDAM

UvA-DARE (Digital Academic Repository)

Een GeoGebra-ondersteunde benadering van sinus en cosinus

Heck, A.

Publication date
2012

Published in
De exacte benadering: vakantiecursus 2012

Link to publication

Citation for published version (APA):
Heck, A. (2012). Een GeoGebra-ondersteunde benadering van sinus en cosinus. In *De exacte benadering: vakantiecursus 2012* (pp. 98-123). Platform Wiskunde Nederland. http://oai.cwi.nl/oai/asset/20398/20398D.pdf

General rights
It is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), other than for strictly personal, individual use, unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

Disclaimer/Complaints regulations
If you believe that digital publication of certain material infringes any of your rights or (privacy) interests, please let the Library know, stating your reasons. In case of a legitimate complaint, the Library will make the material inaccessible and/or remove it from the website. Please Ask the Library: https://uba.uva.nl/en/contact, or a letter to: Library of the University of Amsterdam, Secretariat, Singel 425, 1012 WP Amsterdam, The Netherlands. You will be contacted as soon as possible.

UvA-DARE is a service provided by the library of the University of Amsterdam (https://dare.uva.nl)

Download date:05 Oct 2022

Een GeoGebra-ondersteunde benadering van sinus en cosinus

André Heck, Universiteit van Amsterdam
e-mail: `a.j.p.heck@uva.nl`

1 Verschillende definities van sinus en cosinus

Sinus en cosinus zijn goniometrische functies die essentieel zijn in een wiskundige beschrijving van periodieke verschijnselen. Ze kunnen op vele manieren worden gedefinieerd.

In de meetkundige definitie, die zijn oorsprong heeft in astronomie en landmeetkunde, zijn sinus en cosinus verhoudingen van bepaalde zijden in een rechthoekige driehoek. Ze zijn dan in eerste instantie te beschouwen als afbeeldingen van een scherpe hoek naar het interval $(0, 1)$. Een uitbreiding naar hoekfuncties die ook voor stompe hoeken gedefinieerd zijn is voor de hand liggend. De volgende stappen zijn: (i) een herdefinitie voor hoeken tussen 0° en 360°; en (ii) een periodieke voortzetting tot willekeurige hoeken. Het meetkundige begrip hoek speelt in deze definitie dus een belangrijke rol en landmeetkunde kan als realistische toepassingscontext fungeren (cf., Mazziotta, 1949). Het gaat hier eigenlijk niet om functies gedefinieerd over de reële getallen, maar om functies gedefinieerd op hoeken en dus om functies gedefinieerd op fysische grootheden met een maateenheid (graad).

Projectie van een eenparige beweging langs de eenheidscirkel op de assen van een cartesisch coördinatenstelsel in een plat vlak is een modernere definitie, die meer aansluit bij de wiskundige modellering van periodieke processen en de overgang naar functies op reële getallen vergemakkelijkt. Ook hierin speelt in eerste instantie het begrip hoek nog een belangrijke rol, maar in dit geval als draaiingshoek bij rotatie van het punt $(1, 0)$ om de oorsprong. Een positieve draaiingshoek correspondeert met een draaiing tegen de klok in, een negatieve hoek hoort bij een draaiing met de klok mee. De sinus en cosinus van elke hoek, ongeacht zijn grootte, zijn gedefinieerd en allerlei eigenschappen van sinus en cosinus zijn eenvoudig af te leiden met deze definitie als uitgangspunt. Denk hierbij aan eigenschappen als "hoeken die elkaars tegengestelde zijn hebben dezelfde cosinussen en tegengestelde sinussen" of "de sinus van een hoek en de cosinus van de hoek waarmee hij samen 90° vormt (het complement) zijn gelijk. Als maat voor de grootte van een draaiingshoek kan ook de afgelegde afstand langs de eenheidscirkel bij draaiing van het punt $(1, 0)$ om de oorsprong gehanteerd worden. De natuurlijke eenheid voor een hoek is dan de radiaal, die correspondeert met een cirkelboog met standaardlengte. De belangrijkste stap richting goniometrische functies gedefinieerd op $\mathbb{R}$ is dan gezet: alleen de maateenheid (radiaal) hoeft nog maar genegeerd worden.

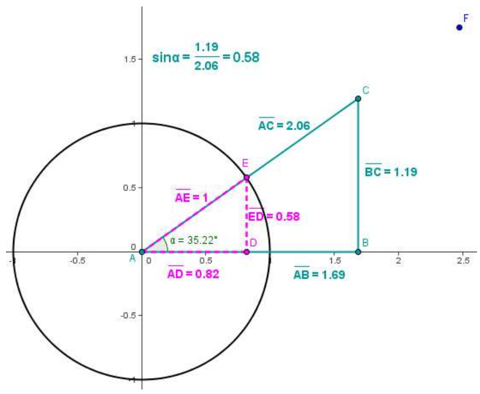
Wie de theorie van gewone differentiaalvergelijkingen machtig is, kan sinus en cosinus definiëren als de functies s en c die de unieke oplossingen zijn het beginwaardenprobleem $s' = c, c' = -s, s(0) = 0, c(0) = 1$. Andere analytische definities van goniometrische functies zijn gebaseerd op machtreeksontwikkelingen, functionaalvergelijkingen, integratie van functies, relaties tussen goniometrische functies en hypergeometrische functies, en de relatie tussen sinus, cosinus en de exponentiële functie via de formule van Euler ($e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$). De geïnteresseerde lezer verwijs ik naar publicaties van Bram van Asch en Frederik van der Blij (1992, 1997, 2002).

2 Vakdidactische kanttekeningen bij een traditionele aanpak

Bovengenoemde analytische definities vallen buiten bereik van het voortgezet onderwijs. De meetkundige aanpak en de eenheidscirkelmethode worden wel overal ter wereld gebruikt om sinus en cosinus te introduceren in het wiskundeonderwijs. Universeel is ook de ervaring dat leerlingen (inclusief wiskundeleraren in opleiding) moeite hebben met hoeken en goniometrische functies, of het nu gaat om een hoekmaat, negatieve hoeken of hoeken groter dan 360°, de definitie van sinus en cosinus, goniometrische relaties, het oplossen van goniometrische vergelijkingen of om het werken met de goniometrische functies in een reële context. Leerlingen maken allerlei fouten en hebben diverse alternatieve concepties (cf., Akkoç, H, 2008; Blackett, N., & Tall, 1991; Brown, 2005; Fi, 2003; Gür, 2009; Weber, 2005). Ik geef in deze sectie een overzicht van de belangrijkste bevindingen uit vakdidactisch onderzoek. Gek genoeg is er weinig onderzoek naar het leren van goniometrie en het werken met goniometrische functies gedaan; de literatuur bij dit artikel is redelijk compleet en slechts vijf proefschriften (Brown, 2005; Challenger, 2009; Delice, 2003; Fi, 2003; Moore, 2010) heb ik over dit onderwerp kunnen traceren.

In de meetkundige aanpak helpen ezelsbruggetjes leerlingen om de drie basisverhoudingen uit de goniometrie te onthouden. De acroniem *soscastoa* staat bijvoorbeeld voor *s*inus = *o*verstaande zijde gedeeld door *s*chuine zijde, *c*osinus = *a*anliggende zijde gedeeld door *s*chuine zijde en *t*angens = *o*verstaande zijde gedeeld door *a*anliggende zijde. Maar het is bekend (cf., Hart, 1981; Behr, et al., 1994; Lamon, 2007) dat werken met verhoudingen niet echt gemakkelijk is voor leerlingen, zeker niet als ook verbindingen gelegd moeten worden tussen een meetkundige figuur en numerieke relaties. Tevens komen opgaven in tekstboeken vaak neer op het oplossen van algebraïsche vergelijkingen en dan struikelen veel leerlingen als gevolg van gebrekkige algebraïsche vaardigheden. In de meetkundige aanpak kunnen leerlingen moeite hebben en houden met het inschatten van functiewaarden of zelfs het bepalen van het teken van een sinus of cosinus bij een gegeven hoek. Ook geeft deze aanpak leerlingen weinig houvast bij het bepalen wanneer de sinus- en cosinusfunctie stijgend en dalend zijn. Volgens Orhun (2010) komt dit vooral omdat leerlingen tijdens en na deze meetkundige aanpak sinus en cosinus blijven associëren met een verband tussen een hoek en de lengtes van zijden van een rechthoekige driehoek. Aan het functiebegrip wordt onvoldoende aandacht besteed in de lessen, met als gevolg dat leerlingen functiewaarden niet goed kunnen inschatten als er niet expliciet een hoekmaat bij vermeld is. Menig leerling kan de verleiding niet weerstaan om $\sin(3)$ op te vatten als $\sin(3°)$. Als tweede oorzaak van gebrekkige kennis en vaardigheden noemt Orhun het onvoldoende oefenen met radiaal als hoekmaat, waardoor de laatste stap naar goniometrische functies gedefinieerd op $\mathbb{R}$ niet goed uit de verf komt. Eigenlijk duikt voor veel leerlingen de maat radiaal uit het niets op, zien ze niet goed in hoe deze past bij de keuze van booglengte als maat voor een draaiingshoek, en leren ze dan maar omrekeningsformules tussen graden en radialen uit het hoofd. Sinus en cosinus zijn voor de leerlingen op deze manier geen functies gedefinieerd op de verzameling van reële getallen, maar blijvend gekoppeld aan lengteverhoudingen in driehoeken bij een gegeven hoek. Orhun's advies en dat van andere onderzoekers (cf., Brown, 2005; Challenger, 2010; Martínez-Sierra, 2008a,b; Moore, 2010) is om leerlingen expliciet te helpen met het ontwikkelen van een duidelijke link tussen de meetkundige wereld en de wereld van functies en grafieken. Dit gaat niet vanzelf, maar vereist een uitgebalanceerde instructie met volop uitleg, voorbeelden en oefeningen.

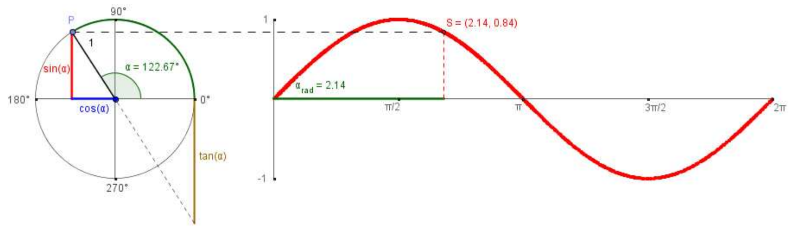
Als de eenheidscirkel-methode gebruikt wordt om sinus en cosinus te introduceren, dan kan men goniometriesommen over driehoeken maken door een gegeven rechthoekige driehoek in een opdracht, zeg $\triangle ABC$, te vergelijken met een gelijkvormige referentiedriehoek, zeg $\triangle ADE$, met de oorsprong A als hoekpunt, met een horizontaal en een loodrecht hierop staand lijnsegment als twee zijden van de driehoek en met een derde hoekpunt E op de eenheidscirkel; zie Figuur 1, die met het dynamische wiskundepakket GeoGebra gemaakt is.



Figuur 1: Schermafdruk van een GeoGebra activiteit voor sinusberekening via lengteverhoudingen in een driehoek en door gebruik te maken van een referentiedriehoek binnen de eenheidscirkel. Door het punt F te verslepen kan de hoek α ingesteld worden. Door het punt C te verslepen kan een gelijkvormige driehoek gemaakt worden.

Het numeriek benaderen van sinus en cosinus kan in de eenheidscirkel-methode uitgevoerd worden door bij een gegeven hoek een halflijn te tekenen vanuit de oorsprong die samen met de positieve x-as de gegeven hoek vormt en dan de coördinaten van het snijpunt te bepalen van deze lijn met de eenheidscirkel. De coördinaten van het snijpunt horen bij sinus en cosinus. Weber (2005, 2008) constateerde evenwel dat leerlingen in de schoolpraktijk deze procedure weinig met pen en papier uitvoeren. In zijn optiek gaan tekstboekschrijvers en docenten er te gemakkelijk van uit dat leerlingen het proces kunnen begrijpen zonder veel praktijkervaring, ook al is uit onderzoeksliteratuur (cf., Tall et al., 2000) bekend dat persoonlijke, fysieke ervaring een haast onmisbare stap in het leerproces is. Hier worden kansen gemist, zoals ook bleek in het master research project van Tompogliou (2007) waarin hij een RME-aanpak m.b.v. de eenheidscirkel in een Grieks lyceum beproefde, met een reuzenrad als realistische context. Tompoglou vond dat de zestien- en zeventienjarige leerlingen via de eenheidscirkel-methode een beter begrip van eigenschappen van goniometrische functies verwierven dan met een traditionele meetkundige aanpak. In de meetkundige aanpak leunden leerlingen sterk op het inprenten en onthouden van allerlei eigenschappen. In de eenheidscirkel-methode konden zij veel meer eigenschappen zelf afleiden. Ook concludeerde hij dat een sterke link tussen de meetkundige aanpak en de eenheidscirkel-methode goed te realiseren is, maar dat leerlingen meer moeite hebben met de vervolgstap van het werken met de eenheidscirkel naar de wereld van functies en grafieken (met eigenschappen als stijgende en dalende functie, maxima en minima, symmetrie, etc.).

Wel is in de loop van de tijd duidelijk geworden dat ICT bij kan dragen aan een beter begrip van sinus en cosinus door leerlingen, of dit nu via grafische rekenmachine, specifieke computerprogramma's of dynamische applets gebeurt (cf., Blackett & Tall, 1991; Johari et al., 2010; Johnson & Walker, 2011; Kissane & Kemp, 2009; Moore, 2009; Ross et al., 2011; Takači et al., 2005; Zengin et al., 2012). De belangrijkste winstpunten van ICT-gebruik bij het leren werken met goniometrische functies zijn: (i) leerlingen en docenten kunnen snel en gemakkelijk grafieken van deze functies tekenen en hiermee verder aan de slag gaan; (ii) leerlingen hebben meer mogelijkheden om transformaties van goniometrische functies te exploreren; (iii) dynamische user-interfaces ondersteunen de bestudering van de link tussen de eenparige cirkelbeweging van een punt en goniometrische functies (Figuur 2); (iv) meetgegevens van periodieke verschijnselen kunnen m.b.v. ICT gemakkelijker vergeleken worden met resultaten van wiskundige modellen gebaseerd op goniometrische functies.



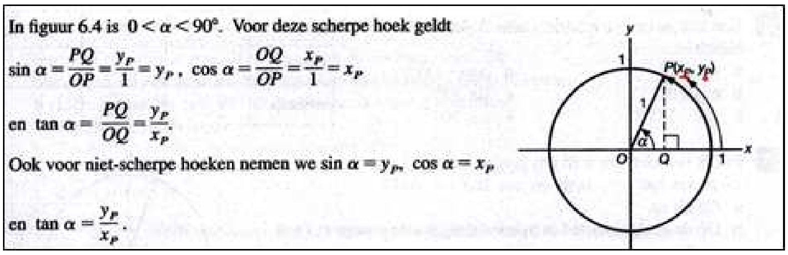
Figuur 2: Schermafdruk van GeoGebra activiteit voor sinusberekening via de eenheidscirkel-methode. Door het punt P te verslepen kan de draaiingshoek α ingesteld worden en het bijpassende punt S op de sinusgrafiek gevisualiseerd worden.

Hoe dan ook, zowel de meetkundige aanpak met driehoeken als de methode die gebruik maakt van de eenheidscirkel kan als uitgangspunt gekozen worden om sinus en cosinus te introduceren. Maar het is belangrijk zich te realiseren dat, hoewel beide aspecten van sinus en cosinus in onderwijs aan bod moeten komen, er een keuzemogelijkheid is voor de leerroute. Vakdidactisch onderzoek heeft nog geen uitsluitsel gegeven welke route het meest effectief is. Kendall en Stacey (1996, 1997) rapporteerden dat de meetkundige aanpak beperkt tot scherpe hoeken in hun studie op een Australische school met tien- en elfjarige leerlingen tot betere leeropbrengsten leidde dan de eenheidscirkel-methode. Dit is eigenlijk niet zo vreemd, want als men zich beperkt tot het scherpe hoeken, dan heeft de eenheidscirkel-methode weinig of geen meerwaarde en is deze waarschijnlijk te abstract voor de tien- en elfjarigen. Weber (2005, 2008) vond in zijn studie met oudere studenten op een Amerikaans college juist het tegenovergestelde: studenten die hij onderwees via de eenheidscirkel-methode, met een nadruk op het daadwerkelijk uitvoeren van het proces van numeriek benaderen van sinus- en cosinuswaarden, presteerden beter dan de studenten die hij via de meetkundige aanpak onderwees. In een vergelijkingsstudie over goniometrische kennis en vaardigheden van Engelse en Turkse leerlingen vonden Delice en Roper (2006) dat Turkse leerlingen beter overweg konden met algebraïsche aspecten van goniometrie dan hun Engelse collega's, en dat Engelse leerlingen op hun beurt beter presteerden in toepassingen van goniometrie in contexten uit de echte wereld. Zij noemden de verschillen in curricula en schoolpraktijk in beide landen als voornaamste oorzaak en verklaring van de verschillen. Challenger (2009) formuleerde dit als volgt: "What you get is what you teach." Iets soortgelijks geldt mijns inziens voor de onderzoeken van Weber (2005) en van Kendall en Stacey (1997): de onderzoeksresultaten hangen af van de mate van overeenstemming tussen het onderzoeksinstrument (voor- en natoetsen) en de toegepaste instructiemethode.

Nederlandse wiskundeboeken combineren de bovenstaande benadering van goniometrie. In de onderbouw wordt de meetkundige aanpak voor sinus en cosinus van scherpe hoeken in een rechthoekige driehoek behandeld. Hierna stapt men in de bovenbouw over op de eenheidscirkel-methode, waarin sinus en cosinus gedefinieerd worden als de verticale respectievelijk horizontale coördinaat van een punt verkregen na draaiing van het punt $(1, 0)$ rondom de oorsprong over een gegeven hoek (zie Figuur 3).

Maar in deze aanpak zijn sinus en cosinus eigenlijk nog steeds niet als functies van reële getallen gedefinieerd. Dit wordt min of meer afgerond door de introductie van radialen en het simpelweg negeren van deze maateenheid (zie Figuur 4.

De overgang van functies op hoeken naar goniometrische functies is overigens lastiger dan op het eerste gezicht lijkt. De connectie tussen graden en radialen als hoekmaat is en blijft dominant aanwezig en eenieder kan er zich op betrappen dat hij of zij bijvoorbeeld bij de vraag wat de waarde van $\sin \frac{\pi}{3}$ is toch denkt aan een draaiingshoek



In figuur 6.4 is $0 < \alpha < 90°$. Voor deze scherpe hoek geldt

$\sin\alpha = \dfrac{PQ}{OP} = \dfrac{y_P}{1} = y_P$, $\cos\alpha = \dfrac{OQ}{OP} = \dfrac{x_P}{1} = x_P$

en $\tan\alpha = \dfrac{PQ}{OQ} = \dfrac{y_P}{x_P}$.

Ook voor niet-scherpe hoeken nemen we $\sin\alpha = y_P$, $\cos\alpha = x_P$

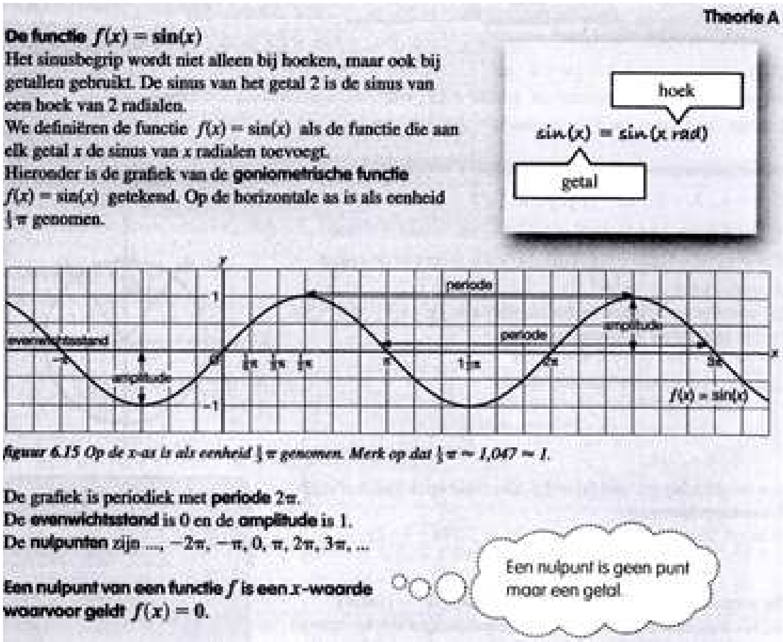
en $\tan\alpha = \dfrac{y_P}{x_P}$.

Figuur 3: Fragment uit een wiskundeboek waarin de overgang van driehoek naar eenheidscirkel toegelicht wordt.

van $\frac{\pi}{3}$ radialen of aan een driehoek met een hoek van 60 graden. De connectie tussen π en 180° is ook buitengewoon sterk en in ieder geval sterker dan de link tussen radiaal en booglengte op een eenheidscirkel (Akkoç, 2008; Akkoç en Gül, 2010; Orhun, 2010). Dit hindert leerlingen bij het beschouwen van π als een reëel getal in de buurt van 3,14.

In bovenstaande getrapte benadering van goniometrie zijn de sinus- en cosinusfuncties weliswaar geïntroduceerd, maar hun grafieken zijn toch nog een raadsel voor leerlingen en eigenlijk niet meer dan door grafische rekenmachine of wiskundige software geproduceerde objecten. Leerlingen leren nog wel de exacte waarden van enkele bijzondere hoeken, maar gebruiken deze resultaten haast niet meer om een grafiek zoals in Figuur 5 te schetsen.

Probleem is en blijft dat leerlingen geconfronteerd worden met functies waarvan de functiewaarden niet meer via rekenkundige bewerkingen berekend kunnen worden; ze moeten afgelezen worden uit gegeven grafieken of uitgerekend worden m.b.v. een rekenmachine of wiskunde software. Werden functies tot dan toe in de schoolloopbaan als machientjes met in- en uitvoer van getallen geïntroduceerd, nu moeten leerlingen ineens een veranderlijke grootheid (hoek) via een grafisch gerepresenteerde constructie koppelen aan twee andere grootheden (coördinaten van een punt op de eenheidscirkel). Dit



Theorie A

De functie $f(x) = \sin(x)$
Het sinusbegrip wordt niet alleen bij hoeken, maar ook bij getallen gebruikt. De sinus van het getal 2 is de sinus van een hoek van 2 radialen.
We definiëren de functie $f(x) = \sin(x)$ als de functie die aan elk getal x de sinus van x radialen toevoegt.
Hieronder is de grafiek van de **goniometrische functie** $f(x) = \sin(x)$ getekend. Op de horizontale as is als eenheid $\frac{1}{3}\pi$ genomen.

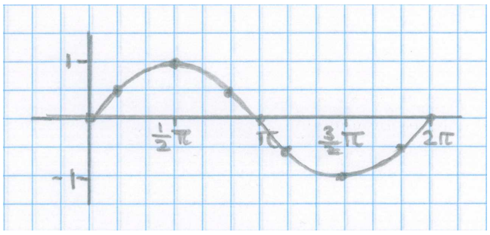
figuur 6.15 Op de x-as is als eenheid $\frac{1}{3}\pi$ genomen. Merk op dat $\frac{1}{3}\pi \approx 1{,}047 \approx 1$.

De grafiek is periodiek met **periode** 2π.
De **evenwichtsstand** is 0 en de **amplitude** is 1.
De **nulpunten** zijn ..., -2π, $-\pi$, 0, π, 2π, 3π, ...

Een nulpunt van een functie f is een x-waarde waarvoor geldt $f(x) = 0$.

Figuur 4: Fragment uit een wiskundeboek waarin de overgang van functies op hoeken naar goniometrische functies toegelicht wordt.

proces is van een hoger abstractieniveau dan leerlingen eerder bij veeltermfuncties en rationale functies tegen zijn gekomen. Het vereist een sterk ontwikkeld functiebegrip en voldoende rijpheid om te kunnen werken op een tamelijk hoog abstractieniveau. Maar lang niet alle leerlingen zijn al zo ver als het onderwerp sinus- en cosinusfunctie behandeld wordt. Bijkomend probleem is dat leerlingen tegelijkertijd geconfronteerd worden met twee functies die niet los van elkaar geconstrueerd worden, maar direct aan elkaar gekoppeld zijn: $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ voor alle x. Er wordt dus als het ware in één keer een familie van wiskundige functies ingevoerd. Dit is de



Figuur 5: Schets van de sinusgrafiek op ruitjespapier volgens een standaardmethode.

eerste keer dat leerlingen zoiets mee maken en houdt een risico in dat ze de boel door elkaar gaan halen en uit nood maar allerlei zaken uit hun hoofd gaan leren i.p.v. de wiskundige essentie proberen te doorgronden.

3 Een alternatieve introductie van goniometrische functies

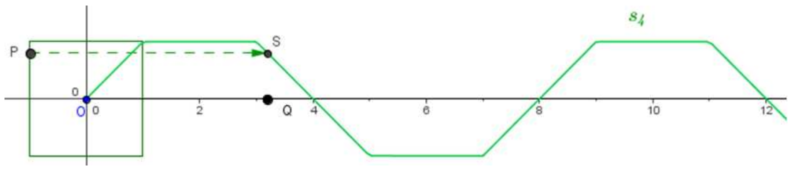
Uit de eerder besproken vakliteratuur en uit de onderwijspraktijk komt het beeld naar voren dat de notie van wiskundige functie niet goed genoeg uit de verf komt bij de gangbare introductie van sinus en cosinus. Leerlingen blijven te veel hangen in de meetkundige context van hoeken en beschouwen sinus en cosinus niet als functies op $\mathbb{R}$. Redenen te over om eens uit te zoeken of er geen alternatief is.

Ik bespreek hier een idee dat ik vijfentwintig jaar geleden al had, maar dat eigenlijk pas sinds de komst van dynamische wiskunde software in voortgezet onderwijs gerealiseerd kan worden. Basisidee is om een vroege introductie van radialen als hoekmaat via de eenheidscirkel-methode uit de weg te gaan, maar in plaats daarvan de zogenaamde opwindfunctie die de reële lijn op de eenheidscirkel afbeeldt centraal te stellen en daarmee goniometrische functies via het begrip booglengte te introduceren. Essentieel onderdeel in deze aanpak is dat leerlingen eerst concreet kunnen oefenen en ervaring opdoen met deze tamelijk compliceerde constructie via opwindfunctie en coördinaatfuncties. Ik laat hen namelijk eerst met pen en papier werken met opwindfuncties gedefinieerd op regelmatige veelhoeken die de eenheidscirkel omschrijven en waarvoor functiewaarden uit te rekenen zijn d.m.v. rekenkundige bewerkingen, alvorens hen te laten onderzoeken wat er gebeurt bij een benadering van de eenheidscirkel met een regelmatige n-hoek voor grote n. Voor deze laatste stap heb ik ICT, in het bijzonder dynamische wiskunde applets gemaakt met GeoGebra, nodig.

In mijn aanpak komen diverse eigenschappen van sinus en cosinus eerst aan bod voor corresponderende functies gedefinieerd m.b.v. regelmatige veelhoeken die de eenheidscirkel omschrijven. De grafieken en eigenschappen van sinus en cosinus komen dan niet meer zo maar uit de lucht vallen, maar zijn limietgevallen van grafieken van corresponderende functies gedefinieerd m.b.v. regelmatige veelhoeken. Sowieso is de hoop en verwachting dat leerlingen sinus en cosinus meer leren appreciëren als reële functies door hun grafieken meer op de voorgrond te plaatsen bij het begin van de behandeling van goniometrische functies en niet slechts als toegift aan het einde van de leerroute te geven.

3.1 De opwindfunctie bij een regelmatige vierhoek

De bedoeling in de instructiemethode is om leerlingen zelf de sinus- en cosinusfunctie te laten construeren door uit te gaan van de grafiek van een periodieke beweging langs de rand van een regelmatig meetkundig object. Om dit proces te vergemakkelijk start ik met een regelmatige vierhoek die in het cartesisch vlak zodanig geörienteerd wordt dat het punt $(1, 0)$ zich halverwege op een verticale zijde bevindt en een punt P dat eenparig tegen de wijzers van de klok in beweegt langs de vierhoek vertrekkend vanuit $(1, 0)$; zie Figuur 6, waarin een schermafdruk van een bijpassende GeoGebra activiteit staat.



Figuur 6: Schermafdruk van een GeoGebra activiteit waarin de grafiek van een sinusachtige functie getekend is en de connectie tussen het punt P op de regelmatige vierhoek en het punt S op de grafiek van de verticale positie van P uitgezet tegen afgelegde afstand van het punt P gevisualiseerd wordt. Het punt Q op de horizontale as correspondeert met de afgelegde weg. De grafiek hoort bij een functie aangeduid met s_4.

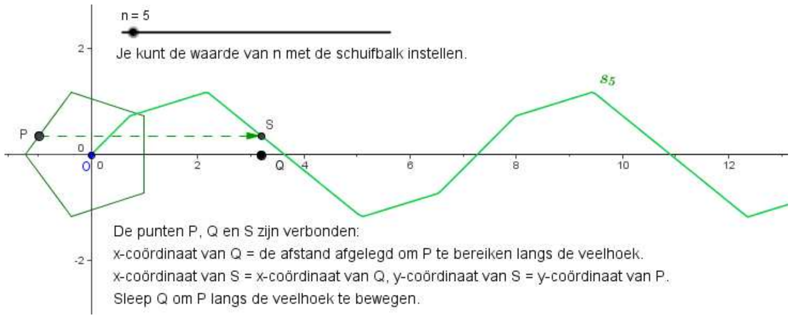
Leerlingen beginnen niet gelijk met zo’n dynamische applet, maar dokteren eerst met pen en papier uit wat de vorm van de grafiek van de verticale positie van het bewegende punt P uitgezet tegen de afgelegde afstand langs de regelmatige vierhoek precies is. Dit helpt hen naar verwachting met het goed begrijpen van de constructie: de coördinaten van een punt langs de vierhoek hangen af van de afgelegde afstand van het bewegende punt. De sinusachtige functie s_4 is op deze manier een samenstelling van de opwindfunctie, waarin elk positief reëel getal z afgebeeld wordt op het punt op de vierhoek dat bereikt wordt na een wandeling tegen de wijzers van de klok in langs de vierhoek over een afstand z met vertrekpunt in $(1, 0)$, de afbeelding die een punt in het vlak projecteert op de verticale as, en de afbeelding van de verticale as naar de reële getallen door de verticale coördinaat van elk punt te nemen. De cosinusachtige functie c_4 is analoog als samenstelling van afbeeldingen te definiëren.

De volgende stap is om de grafiek in Figuur 4 uit te breiden over de negatieve horizontale as. Leerlingen moeten inzien dat deze uitbreiding correspondeert met wandelingen met de richting van de klok mee langs de regelmatige vierhoek. Dit is van belang als later in de leerroute de eenheidscirkel-methode behandeld wordt. Aan de hand van de grafiek van de sinusachtige functie s_4 kunnen leerlingen allerlei eigenschappen bestuderen, zoals de periodiciteit (met periode 8), de eigenschappen van $s_4(-x) = -s_4(x)$ en $s_4(x+4) = -s_4(x)$ voor alle x, en $s_4(x) = x$ voor kleine waarden van x. Door ook de grafiek van de cosinusachtige functie c_4 te bestuderen kunnen leerlingen ook inzien dat $c_4(x) = s_4(4-x)$ voor alle x. Kortom, leerlingen kunnen hun aandacht richten op functies gedefinieerd door de constructie m.b.v. een regelmatige vierhoek die de eenheidscirkel omschrijft en kunnen allerlei nuttige eigenschappen van deze functies zelf uitdokteren.

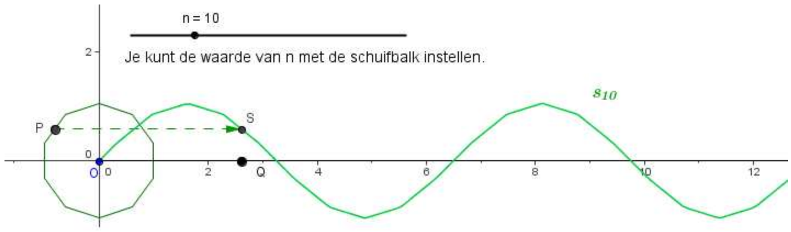
3.2 De opwindfunctie bij een regelmatige veelhoek

De eerder besproken constructie van een opwindfunctie bij een regelmatige vierhoek laat zich uitbreiden tot regelmatige n-hoeken die de eenheidscirkel omschrijven en die in het cartesisch vlak zodanig geörienteerd worden dat het punt $(1,0)$ zich halverwege op een verticale zijde bevindt. Een punt P beweegt eenparig tegen de wijzers van de klok in langs de veelhoek vertrekkend vanuit $(1,0)$. Door ook een beweging met de wijzers van de klok mee toe te staan worden sinus- en cosinusachtige functies s_n en c_n gedefinieerd op alle reële getallen. De grafieken van deze functies zijn voor een regelmatige 8-hoek door leerlingen met enige moeite nog wel met pen en papier te achterhalen, maar voor andere veelhoeken biedt dynamische wiskunde software uitkomst; zie de schermafdrukken van GeoGebra activiteiten in de Figuren 7 en 8.

Bij de grafiek van s_{10} horende bij een tienhoek ontstaat al het beeld



Figuur 7: Grafiek van de sinusachtige functie s_5 horende bij een regelmatige 5-hoek.



Figuur 8: Grafiek van de sinusachtige functie s_{10} bij een regelmatige 10-hoek.

van een grafiek van een sinusfunctie. De periode van de functie s_n komt voor grote n ook steeds dichter bij 2π: de periode van de functies s_n horende voor bij een regelmatige n-hoek is namelijk gelijk aan $2n\sin(\dfrac{\pi}{n})$ en dus geldt

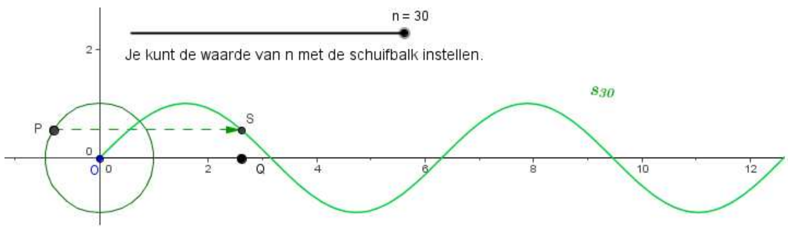
$$\lim_{n\to\infty} 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi \cdot \lim_{y\to\infty} y\sin\left(\frac{1}{y}\right) = 2\pi \cdot \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2\pi.$$

Merk op dat de constructie van de grafiek van de sinusachtige functie

s_n door de speciale oriëntatie van de regelmatige veelhoek automatisch de volgende eigenschap oplevert: voor elke n geldt dat $s_n(x) = x$ voor voldoende kleine x. De eigenschap dat $s_n(-x) = -s_n(x)$ voor alle n en x is ook evident in deze constructie. Dit zijn eigenschappen die voor de echte sinusfunctie ook gelden.

3.3 De opwindfunctie bij de eenheidscirkel

Bij een keuze van $n = 30$ lijkt de grafiek van s_{30} horende bij een regelmatige 30-hoek erg glad en is met het blote oog bijna geen verschil te zien met de grafiek van de sinusfunctie (Figuur 9)



Figuur 9: Grafiek van de sinusachtige functie s_{30} bij een regelmatige 30-hoek.

Dit is niet zo vreemd omdat de regelmatige 30-hoek met het blote oog niet goed meer te onderscheiden is van de eenheidscirkel. De functies s en c kunnen nu respectievelijk geïntroduceerd worden als limieten:

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} s_n, \quad c \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Uiteraard zijn de functies s en c welgedefinieerd en respectievelijk gelijk aan de sinus- en cosinusfunctie, maar de bewijsvoering vereist kennis van analyse op functieruimten. Belangrijker is dat leerlingen kunnen inzien dat een opwindfunctie voor de eenheidscirkel gedefinieerd kan worden op eenzelfde manier als bij regelmatige n-hoeken en dat het erg aannemelijk is dat de grafieken van s_n en c_n voor grote n erg lijken op de grafieken van de corresponderende functies gedefinieerd m.b.v. de eenheidscirkel.

3.4 Van eenheidscirkel-methode naar de meetkundige aanpak van goniometrie

Tot nu toe is de alternatieve aanpak nog geen aandacht besteed aan draaiingshoeken en is er ook nog geen link gelegd met de meetkundige definitie van sinus en cosinus. Er van uitgaand dat leerlingen nog weten dat de omtrek van een eenheidscirkel gelijk is aan 2π en dat een punt op de rand van de eenheidscirkel bij een draaiing over 360° op zichzelf afgebeeld wordt, kunnen zij in een paar opdrachten er toe gebracht worden zich te realiseren dat bij een wandeling tegen de wijzers van de klok langs de eenheidscirkel over een afstand x een draaiing hoort van het punt $(1, 0)$ over een hoek gelijk aan $\frac{360° x}{2\pi}$. Zij moeten hiervoor de link leggen tussen booglengtes en draaiingshoeken en proportioneel redeneren. Door bij een punt op de eenheidscirkel een rechthoekige driehoek binnen de eenheidscirkel te tekenen, zoals in Figuur 1, is door leerlingen in te zien dat de volgende formule geldt:

$$s(x) = \sin\left(\frac{180° x}{\pi}\right).$$

Met deze formule kunnen leerlingen functiewaarden zoals sin(3) uitrekenen m.b.v. tabellen met sinuswaarden of m.b.v. een rekenmachine ingesteld op graad als hoekmaat. Speciale functiewaarden als $s(2\pi)$, $s(\pi)$, $s(\frac{\pi}{2})$, $s(\frac{\pi}{4})$ kunnen hiermee exact berekend worden. De introductie van de radiaal als hoekmaat komt simpelweg neer op het besef dat een cirkelboog van lengte 1 correspondeert met een draaiingshoek gelijk aan $\frac{180°}{\pi}$ en dat dan dus inderdaad geldt

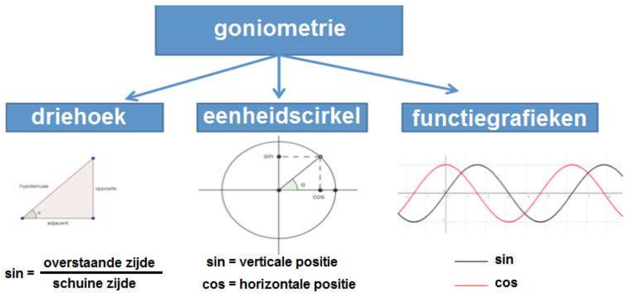
$$s(x) = \sin(x \text{ rad}).$$

De stap om dan ook maar de functies s en sin eenzelfde naam te geven is nu niet groot meer.

3.5 Achterliggende didactische overwegingen

Het moment is aangebroken om nog eens even stil te staan bij didactische principes die ten grondslag liggen aan de alternatieve aanpak en hoe ze in de instructiemethode uitgewerkt zijn.

Op de eerste plaats onderscheid ik drie wiskundige werkvelden die allemaal in min of meer gelijke mate aan bod moeten komen bij de introductie van sinus en cosinus: (i) de meetkunde van driehoeken; (ii) het gebruik van de eenheidscirkel bij goniometrie; (iii) het terrein van goniometrische functies en hun grafieken. In Figuur 10 wordt voor elk werkveld de meest dominante wiskundige representatie getoond.



Figuur 10: Verschillende representaties bij goniometrie.

Hoe en in welke volgorde deze wiskundige objecten in onderwijs aan bod komen is een kwestie van traditie, smaak, of een doelbewuste keuze. In Figuur 11 is aangegeven dat men traditioneel met de meetkundige aanpak van driehoeken begint, daarna overstapt op de eenheidscirkel en tenslotte bij goniometrische functies uitkomt. Nadelen zijn dat de eenheidscirkel en de radiaal als hoekmaat een beetje uit de lucht komen vallen en leerlingen hier maar beperkt mee kunnen oefenen, het functiebegrip in deze benadering onvoldoende aandacht krijgt, de vorm van de grafieken van sinus en cosinus niet op inzichtelijke wijze behandeld wordt en leerlingen niet goed voorbereid worden op belangrijke eigenschappen van goniometrische functies. Figuur 11 illustreert ook een alternatieve aanpak. Opnieuw is de meetkunde van driehoeken het vertrekpunt, maar in plaats van direct doorgaan met de eenheidscirkel kies ik er voor om eerst maar eens periodieke functies en hun grafieken te behandelen die ontstaan door wandelingen over regelmatige veelhoeken en dan pas, als limietgeval, naar de eenheidscirkel over te stappen. Omdat ik op deze manier vroegtijdig de aandacht verleg van hoeken naar functies op reële getallen ben ik aan het einde van de leerroute wel genoodzaakt om de link tussen eenheidscirkel en meetkunde van driehoeken te behandelen; ik keer dus terug naar waar ik in de leerroute begon.

Figuur 11: Traditionele versus alternatieve aanpak van goniometrie.

Ik ben van mening dat afstand en afgelegde weg voor leerlingen beter hanteerbare begrippen zijn dan de toch wat complexe notie van hoek. Maar om gelijk met booglengtes te beginnen voert te ver. Liever laat ik leerlingen eerst met pen en papier puzzelen op grafieken van een sinus- en cosinusachtige functies die ontstaan uit wandelingen op een regelmatige vier- en achthoek. Zo kunnen ze alvast wennen aan de constructie van een periodieke functie op grond van een zogenaamde opwindfunctie. Door m.b.v. het dynamische wiskunde programma GeoGebra te kijken naar regelmatige n-hoeken met grotere waarden voor n, ontstaat het beeld van functies die horen bij de eenheidscirkel.

Deze alternatieve aanpak is geworteld in Tall's theorie over drie stadia in het begrijpen van een wiskundige object (Tall et al., 2000). Voor goniometrische functies betekent dit het volgende: eerst moeten leerlingen leren om de berekening van een functiewaarde als een procedure of stap-voor-stap algoritme te doorlopen en alle details in zich opnemen. Dit gebeurt meestal met pen en papier of via concrete objecten. Als de leerlingen de procedures herhaaldelijk hebben toegepast en voldoende in de gelegenheid zijn geweest om op hun handelen te reflecteren, dan kunnen ze hierna de procedure als een proces beschouwen dat op elke regelmatige n-hoek van toepassing is en in het limietgeval leidt tot een proces dat toepasbaar is voor een eenheidscirkel. Uiteindelijk wordt de eenheidscirkel een zogenaamd procept waarmee leerlingen kunnen anticiperen op resultaten van een proces zonder dit nog daadwerkelijk uit te voeren. Zij kunnen bijvoorbeeld m.b.v. de eenheidscirkel allerlei eigenschappen van goniometrische functie begrijpen en afleiden zonder dit in detail, stap-voor-stap uit te hoeven werken. De behandeling van periodieke functies gedefinieerd m.b.v. regelmatige veelhoeken en hun eigenschappen is een concreet voorproefje op dit begripsniveau.

4 Ervaringen in de klas met de nieuwe aanpak

Het bedenken van een alternatieve aanpak om goniometrische functies te introduceren en het theoretisch onderbouwen van het ontwerp is één ding, maar dat betekent nog niet dat de instructie ook in schoolpraktijk goed werkt. Dit laatste moet ook echt onderzocht worden.

De eerste keer is dit in 2008 gebeurd in een vwo-4 klas met leerlingen die voor Wiskunde D gekozen hadden. Twee master studenten, Rafiq Mehdiyev en Georgia Papageorgiou, onderzochten in een kortlopend onderzoeksproject hoe de lessen in praktijk verliepen en hoe de leerlingen deze aanpak ervoeren. Hun conclusies waren dat de methode voor deze groep leerlingen positief uitpakte: leerlingen vonden de opdrachten goed te doen, het ICT gebruik inspirerend en de lessen leerzaam. Hoewel de alternatieve leerroute wat langer is dan in de traditionele aanpak (zie Figuur 11), bleek achteraf dat de extra benodigde tijd volledig gecompenseerd werd door het betere begrip van de leerlingen van de hoekmaat radiaal: toen de lerares van de klas namelijk later de leerlingen sommen uit het wiskundeboek over omrekening van graden naar radialen en omgekeerd liet maken, zeiden leerlingen tegen haar: "Dit hebben we al gehad." Vervolgens maakten zij de sommen in sneltreinvaart en foutloos. Bij de nabespreking van de resultaten van het onderzoeksproject opperde de lerares dat zij de alternatieve aanpak ook wel voor een "gewone" vwo-klas bij Wiskunde A of Wiskunde B geschikt en aantrekkelijk vond. Met name de constructie van de grafiek van de sinusfunctie via een limietproces van sinusachtige functies bij regelmatige veelhoeken sprak haar erg aan, omdat het volop aanknopingspunten biedt om de vorm van de sinusgrafiek te bespreken in de klas en om leerlingen beter begrip van de sinusfunctie bij te brengen.

Pas vier jaar later is de stier bij de hoorn gevat door Ozcan Demir in zijn master research project en is de alternatieve aanpak beproefd in twee vwo-4 klassen met leerlingen die Wiskunde B gekozen hebben. Ten tijde van het schrijven van dit artikel worden de onderzoeksresultaten geanalyseerd, maar als voorlopige conclusie mag vermeld worden dat de instructie succesvol was. De nieuwe aanpak was ook toegankelijk voor wie alleen Wiskunde B in zijn of haar vakkenpakket heeft. Uit een diagnostische toets voorafgaand aan het experiment in de klas bleek dat de leerlingen inderdaad last hadden van alternatieve concepties op het gebied van goniometrie zoals eerder beschreven. Uit een toets na afloop van het experiment in de klas bleek dat de alternatieve instructiemethode de leerlingen inderdaad geholpen heeft in het overwinnen of bijstellen van misconcepties en geleid heeft tot een goed begrip van sinus en cosinus als wiskundige functie, inclusief het domein, bereik en periodiciteit van deze functies. De natoets wekte wel de indruk dat de link tussen de eenheidscirkel en de meetkunde van driehoeken voor sommige studenten nog fragiel was, maar uit gestructureerde interviews met verschillende leerlingen achteraf bleek dat ze toch meer hadden opgestoken dan op het eerste gezicht uit de diagnostische toets naar voren leek te komen.

5 Conclusie

Uit vakdidactisch onderzoek en praktijkervaring van vwo-docenten betrokken bij dit onderzoek komt naar voren dat de leeropbrengst van de alternatieve aanpak om goniometrische functies te introduceren goed is, geen extra tijd kost en geen drastische wijzigingen in het onderwijs vereist. De experimenten in de klas waren tot nu toe hoopgevend, maar of de alternatieve aanpak ook op grote schaal gaat werken, en ook bij leraren die niet bij voorbaat enthousiast zijn, moet nog worden onderzocht. Voor dit uitproberen in de klas is het bij het onderzoek gebruikte lesmateriaal, zowel in de Engelse als Nederlandse taal, beschikbaar gesteld op de webpagina `www.science.uva.nl/~heck/goniometrie`.

6 Referenties

Akkoç, H. (2008). Pre-service mathematics teachers' concept image of radian. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *39*(7), 857–878.

Akkoç, H., & Akbaş Gül, N. (2010). Analysis of a teaching approach aiming at eliminating student difficulties with radian. *Ankara University, Journal of Faculty of Educational Sciences*, *43*(1), 97–129. Online: `http://dergiler.ankara.edu.tr/dergiler/40/1342/15553.pdf`

Behr, M.J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1994). Rational number, ratio and proportion. In: D.A. Grouws (red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 296–333). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Blackett, N., & Tall, D.O. (1991). Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software. In: F. Furinghetti (red.), *Proceedings of the 15th Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1 (pp. 144-151). Assisi, Italië.

Brown, S.A. (2005). *The Trigonometric Connection: Students' Understanding of Sine and Cosine.* PhD thesis. Illinois State University, USA.

Challenger, M. (2009). *From Triangles to a Concept: A Phenomenographic Study of A-level Students' Development of the Concept of Trigonometry.* PhD thesis. University of Warwick, UK. Online: `http://wrap.warwick.ac.uk/1935/1/WRAP_THESIS_Challenger_2009.pdf`

Delice, A. (2003). *A comparative study of students' understanding of trigonometry in the United Kingdom and the Turkish Republic.* PhD thesis. University of Leeds, UK.

Delice, A., & Roper, T (2006). *Implications of a comparative study for mathematics education in the English education system. Teaching Mathematics and its Applications*, *25*(2), 64–72.

Fi, C. (2003). *Preservice Secondary School Mathematics Teachers' Knowledge of Trigonometry: Subject Matter Content Knowledge, Pedagogical Content Knowledge and Envisioned Pedagogy.* PhD. thesis. University of Iowa, USA.

Gür, H. (2009). Trigonometric learning. *New Horizons in Education*, *57*(1), 67–88.
Online: `www.hktalhk.edu.hk/hkta/NewHorizon/abstract/2009May/6.pdf`

Hart, K.M. (1981). *Children's Understanding of Mathematics, 11-16.* London: John Murray.

Johari, N.A., Chan, L.O., Ramli, R., & Ahmat, N. (2010). The effect of GSP on students' understanding in the graphs of trigonometric functions. In *Electronic Proceedings of the 15th Asian Technology Conference in Mathematics*. Online:
http://atcm.mathandtech.org/ep2010/regular/3052010_18310.pdf

Johnson, J., & Walker, M. (2011). Trigonometry students' knowing when to use hand-held CAS technology to make sense of mathematics. *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education*, *6*(2), 17-33.
Online: http://msme.us/2011-2-4.pdf

Kendall, M., & Stacey, K. (1996). Trigonometry: Comparing ratio and unit circle methods. In P. Clarkson (red.), *Technology in Mathematics Education: Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 322–329). Melbourne: MERGA.

Kendall, M., & Stacey, K. (1997). Teaching trigonometry. *Vinculum*, *29*(1), 4–8.
Online: http://staff.edfac.unimelb.edu.au/~kayecs/publications/1997/KendalStacey-Trig.pdf

Kissane, B., & Kemp, M. (2009). Teaching and learning trigonometry with technology. In *Electronic Proceedings of the 14th Asian Technology Conference in Mathematics*. Beijing, China. Online:
http://atcm.mathandtech.org/EP2009/papers_full/2812009_17288.pdf

Lamon, S.A. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In: F.K. Lester (red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 629–667). Charlotte, NC: Information Age Publishing and National Council of Teachers of Mathematics.

Martínez-Sierra, G. (2008a). On the transit from trigonometry to calculus: The case of the conceptual breaks in the construction of the trigonometric functions in school. In *Electronic Proceedings of the 11th International Conference on Mathematics Education*, Mexico.
Online: http://tsg.icme11.org/document/get/667

Martínez-Sierra, G. (2008b). From the analysis of the articulation of the trigonometric functions to the corpus of Eulerian analysis to the interpretation of the conceptual break present in its scholar structure. In *Electronic Proceedings of the ICME Satellite Meeting "History and Pedagogy of Mathematics"*, Mexico. Online:
`www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/Gustavo/HPM_Proceddings_Extenso.pdf`

Mazziotta, E. (1949). The basis concept of trigonometry. *Mathematics Magazine*, *22*(3), 139–150.

Moore, K.C. (2009). Trigonometry, technology, and didactic objects. In S. Swars, D. Stinson, & S. Lemons-Smith (red.), *Proceedings of 31st Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 5 (pp. 1480-1488). Atlanta, Georgia.
Online: `http://www.pmena.org/2009/proceedings/TECHNOLOGY/techRR369892.pdf`

Moore, K.C. (2010). *The Role of Quantitative Reasoning in Precalculus Students Learning Central Concepts of Trigonometry.* PhD thesis. Illinois State University, USA.
Online: `www.patthompson.net/PDFversions/Theses/2010Moore.pdf`

Orhun, N. (2010). The gap between real numbers and trigonometric relations. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 20. G.R.I.M. (University of Palermo, Italy).
Online: `http://dipmat.math.unipa.it/~grim/QRDM_Orhun_20_2010.pdf`

Ross, J.A., Bruce, C.D., & Sibbald, T. (2011). Sequencing computer-assisted learning of transformations of trigonometric functions. *Teaching Mathematics and its Applications*, *30*(3), 120–137.

Takači, D., Herceg D., & Stojković, R. (2005). Possibilities and limitations of scientific workplace in studying trigonometric functions. *The Teaching of Mathematics*, 8(2), 61-72.
Online: `http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/15/tm822.pdf`

Tall, D.O., Thomas, M., Davis, E., Gray, E., & Simpson, A. (2000). What is the object of the encapsulation of a process? *Journal of Mathematical*

Behavior, *18*(2), 1–19.

Tompoglou, I. (2007). *An RME Approach to Trigonometry Using a Ferris Wheel and the Unit Circle.* Master thesis. Universiteit van Amsterdam.

Van Asch, A.G., & Van der Blij, F. (1992). Hoeken en hun maat. *CWI Syllabus* 29, Amsterdam.

Van Asch, A.G., & Van der Blij, F. (1997). Goniometry between geometry and analysis. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *28*(1), 85–96.

Van Asch, A.G., & Van der Blij, F. (2002). Sinus en cosinus, één functionaalvergelijking? *Euclides*, *78*(2), 60–62.

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, *17*(3), 94–115.

Weber, K. (2008). Teaching trigonometric functions: Lessons learned from research. *Mathematics Teacher*, *102*(2), 144–150.

Zengin, Y., Furkan, H., & Kutluca, T. (2012). The effect of dynamic mathematics software GeoGebra on student achievement in teaching of trigonometry. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *31*, 183–187.