



**UvA-DARE (Digital Academic Repository)**

**Deterministische chaos: grenzen aan voorspelbaarheid**

Hommes, C.H.

*Published in:*  
Rostra Economica

[Link to publication](#)

*Citation for published version (APA):*

Hommes, C. H. (1994). Deterministische chaos: grenzen aan voorspelbaarheid. *Rostra Economica*, 200, 12-15.

**General rights**

It is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), other than for strictly personal, individual use, unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

**Disclaimer/Complaints regulations**

If you believe that digital publication of certain material infringes any of your rights or (privacy) interests, please let the Library know, stating your reasons. In case of a legitimate complaint, the Library will make the material inaccessible and/or remove it from the website. Please Ask the Library: <https://uba.uva.nl/en/contact>, or a letter to: Library of the University of Amsterdam, Secretariat, Singel 425, 1012 WP Amsterdam, The Netherlands. You will be contacted as soon as possible.

# Deterministische chaos: gren

In het dagelijks leven worden we nogal eens geconfronteerd met zaken die grillig en onvoorspelbaar lijken: het weer, een vlieger op het strand, een renteverlaging, de dollarkoers, aandelenkoersen op de beurs, een overstroming of aardbeving, een beurskrach, ga zo maar door. Vaak wordt gedacht dat het onvoorspelbare karakter van deze zaken berust op het feit dat ze door het toeval bepaald worden. De laatste decennia is het echter tot de wetenschap doorgedrongen dat er nog een fundamenteel andere mogelijke verklaring voor grillig en onvoorspelbaar lijkend gedrag bestaat: deterministische chaos. Daarbij wordt grillig gedrag beschreven door eenvoudige, exacte niet-lineaire wetmatigheden.

dr C.H. Hommes

In het jaar 2061 zal de komeet Halley weer dicht langs onze aarde scheren, ongeveer langs dezelfde baan als in 1986. Weinigen lijken aan de juistheid van deze voorspelling te twijfelen. Planeetbanen lijken bijna perfect voorspelbaar en ook voor komeetbanen kan soms een goede voorspelling gegeven worden. Dat lijkt ook logisch, immers planeten en kometen bewegen volgens de bekende gravitatie-wetten van Newton. Als we de beginposities en snelheden van de hemellichamen kennen, vertellen de bewegingsvergelijkingen van Newton ons precies de posities op elk willekeurig toekomstig tijdstip. Voor de komeet Halley leert deze berekening dat de baan ongeveer een keer in de 75 jaar de baan van de aarde kruist. De enige onzekere factor daarbij lijkt dat de massa van een komeet langzaam afneemt, waardoor de baan kan veranderen. Toch zijn banen van hemellichamen niet altijd voorspelbaar, zelfs niet als de massa's constant zijn. Rond 1900 hield de wiskundige Poincaré zich bezig met het zogeheten 3-lichamen probleem: hoe zien de banen van een systeem van drie hemellichamen eruit? Door de observaties van Kepler (rond 1600) en de wetten van Newton (rond 1700) was de oplossing van het 2-lichamen probleem al veel eerder bekend: in een systeem van twee planeten beweegt de ene planeet in een ellipsbaan rond de andere. Sedert die tijd hebben velen geprobeerd dit resultaat uit te breiden tot een systeem van drie of meer hemellichamen. Dat bleek echter een moeilijk en hardnekkig probleem.

Poincaré bekeek een systeem van twee grote en een zeer klein hemellichaam, zeg twee planeten en een kleine komeet, en deed daarbij een verrassende ontdekking. De ene planeet beweegt ongeveer in een ellipsbaan rond de andere, maar de beweging van de komeet is veel moeilijker te beschrijven. Het bleek zelfs mogelijk dat de komeet een zeer gecompliceerde baan rond de twee planeten doorloopt, die zich nooit herhaalt. Erger, de baan hangt ook nog van de beginpositie en beginsnelheden van de planeten en de komeet af. Een iets andere uitgangssituatie leidt tot een totaal andere voorspelling van de positie van de komeet over zeg 100 jaar.

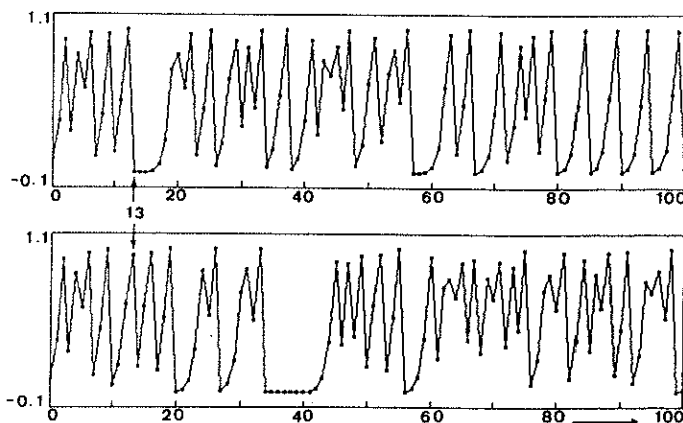
## DETERMINISTISCHE CHAOS

Het fundamentele belang van de ontdekking van Poincaré is eigenlijk pas de laatste 20 jaar goed tot wiskundigen en andere wetenschappers doorgedrongen. Het inzicht dat eenvoudige niet-lineaire deterministische modellen zeer grillig, bijna onvoorspelbaar gedrag kunnen genereren wordt nu door sommigen zelfs de derde wetenschappelijke revolutie van deze

eeuw genoemd. Poincaré wordt thans als de grondlegger van de zogeheten 'chaostheorie' gezien. De naam 'chaostheorie' is eigenlijk verwarrend, maar wordt nogal eens gebruikt, met name in populair wetenschappelijke artikelen. Bij de 'chaostheorie' gaat het in feite om de analyse van niet-lineaire dynamische modellen. Ter illustratie geven we een eenvoudig voorbeeld uit de biologie. De grootte van een populatie op tijdstip  $t$  (zeg in jaar  $t$ ) wordt gegeven door  $x_t$  (voor het gemak genormeerd op 1). De populatiegroei wordt beschreven door de differentievergelijking:  $x_{t+1} \approx \lambda x_t(1-x_t)$ ,

waarbij  $\lambda$  een parameter tussen 1 en 4 is. De populatiegrootte  $x_{t+1}$  van volgend jaar is dus een niet-lineaire (in dit geval kwadratische) functie van de huidige populatiegrootte  $x_t$ . Als de populatie klein is ( $x_t \approx 0$ ), dan is de term  $1-x_t \approx 1$  zodat  $x_{t+1} \approx \lambda x_t$  en de populatie zal exponentieel gaan groeien. Als de populatiegrootte dicht bij de maximale grootte komt ( $x_t \approx 1$ ), dan is  $1-x_t \approx 0$ , zodat ook  $x_{t+1} \approx 0$  en de populatie bijna zal uitsterven. De term  $1-x_t$  in bovenstaande differentievergelijking kan dus als een overbevolkingseffect gezien worden. Bovenstaande differentievergelijking is ongeveer de eenvoudigste niet-lineaire differentievergelijking die je kunt bedenken. Je zou dus verwachten dat de bijbehorende tijdspaden niet al te gecompliceerd kunnen zijn. Als de parameter  $\lambda$  niet al te groot is, is dat ook zo. Voor  $\lambda$  tussen 1 en 3 convergeren de oplossingen naar een stabiele evenwichtswaarde. Op lange termijn stabiliseert de populatiegrootte zich dus op een constante waarde. Voor  $\lambda > 3$  is de evenwichtswaarde echter instabiel, en blijft de populatiegrootte ook op lange termijn fluctueren. Voor  $\lambda$  tussen 3 en ongeveer 3.4 convergeert de oplossing naar een schommeling met periode 2, d.w.z. de populatiegrootte springt heen en weer tussen een hoge waarde in zeg de oneven tijdsperioden en een lage waarde in de even tijdsperioden.

Als  $\lambda$  verder toeneemt treden fluctuaties met periode 4, 8, 16, 32 etc. op. Als  $\lambda$  nog verder toeneemt worden de fluctuaties steeds onregelmatiger en lijken ze niet eens meer op een periodieke schommeling. De populatiegrootte blijft maar fluctueren



Figuur 1

# zen aan voorspelbaarheid

en neemt, op bijna onvoorspelbare wijze allerlei waarden tussen 0 en 1 aan. In figuur 1 zijn ter illustratie tijdspaden van de eerste 100 waarden weergegeven, voor de parameter  $\lambda = 4$ . Hoewel de wetten van het model exact vast liggen, kunnen de oplossingen van het model zich toch grillig gedragen.

## Het is prettig te weten waarom je iets niet kunt voorspellen

### KLEINE OORZAKEN MET GROTE GEVOLGEN

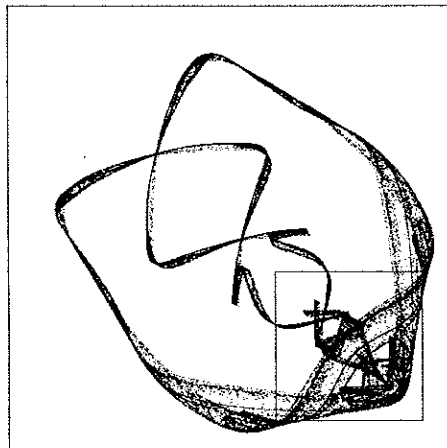
Wie had nu kunnen denken dat de eenvoudige differentievergelijking  $x_{t+1} = 4x_t(1-x_t)$  zulke gecompliceerde oplossingen als in figuur 1 geeft? Misschien wil je een gokje wagen wat de populatiegrootte op tijdstip 110 zal zijn? De tijdspaden van eenvoudige niet-lineaire deterministische modellen kunnen er dus zeer grillig uitzien. Behalve grilligheid, vertonen de tijdreeksen nog een andere eigenschap, die vergaande consequenties heeft m.b.t. de voorspelbaarheid. In figuur 1 zijn twee tijdreeksen gegeven, beiden voor hetzelfde model met de parameter  $\lambda = 4$ . Het enige verschil tussen de twee tijdreeksen is een kleine verandering van de begintoestand:  $x_0 = 0.1$  bij de eerste en  $x_0 = 0.1001$  bij de tweede tijdreeks. De beginstukken van beide tijdreeksen (zeg de eerste tien perioden) zijn ongeveer hetzelfde, zodat met het model dus goede korte termijn voorspellingen gemaakt kunnen worden. Daarna gaat het echter grondig mis! Hoewel het verschil tussen de twee beginwaarden uitermate klein is, zijn de twee tijdreeksen na verloop van tijd totaal verschillend. Na 13 tijdperioden ligt de eerste tijdreeks dicht bij 0, terwijl de tweede tijdreeks dicht bij 1 ligt. In 13 perioden is het verschil dus gegroeid van 0.0001 tot zeg 0.9, d.w.z. met ongeveer een factor 9000! We spreken van gevoelige afhankelijkheid van startwaarden. Een kleine verandering in de begintoestand leidt na verloop van tijd tot een totaal andere voorspelling. Kleine veranderingen hebben grote gevolgen! Aangezien in de praktijk de begintoestand bijna nooit exact gemeten kan worden, is daarom een lange ter-

mijn voorspelling met een 'chaotisch' model principieel onmogelijk.

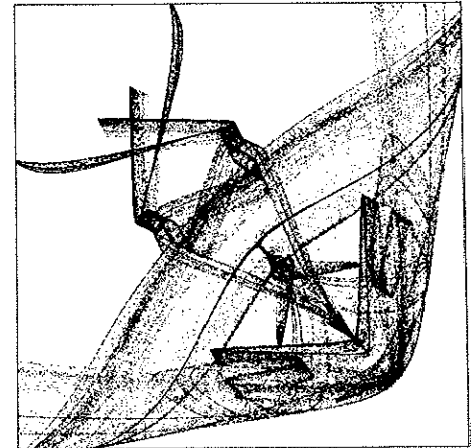
### WEERSVOORSPELLING

Gevoelige afhankelijkheid van startwaarden is in feite de reden waarom het weer in principe niet meer dan circa twaalf dagen vooruit voorspeld kan worden. De atmosferische modellen zoals die b.v. door het KNMI gebruikt worden bestaan uit een stel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen, waarvan de oplossingen chaotisch gedrag en gevoeligheid van startwaarden vertonen. Uiteraard kan de begintoestand van de atmosfeer (b.v. temperatuur en windsnelheid) nooit exact gemeten worden. Een kleine verstoring van deze begintoestand kan na een dag of twaalf een totaal andere weersvoorspelling geven. Het fladderen van een vlinder kan de weersvoorspelling over 12 dagen totaal veranderen. Dit is het begin jaren 60 door de meteoroloog Lorenz ontdekte 'vlindereff-

schijnselen in bovenstaande voorbeelden zeer algemeen van aard zijn en ook bijvoorbeeld in economische niet-lineaire dynamische modellen optreden. In de laatste 10 jaar zijn dan ook talloze voorbeelden in de economische literatuur verschenen van eenvoudige niet-lineaire economische mechanismen die chaotisch gedrag kunnen genereren. Ter illustratie geven we in figuur 2 een zogeheten 'vreemde aantrekker' van een prijsaanpassingsmodel met 3-goederen. Horizontaal en verticaal staan de prijzen van twee van de drie goederen uitgezet. De prijzen convergeren niet naar een evenwichtsprijs, maar blijven kras heen en weer springen over de 'vreemde aantrekker' in figuur 2a. Grillig, bijna onvoorspelbaar prijsgedrag is het resultaat. Aan de andere kant suggereert de uitvergroting in figuur 2b een onderliggende meetkundige structuur. Deze 'vreemde aantrekker' illustreert op fraaie wijze dat 'deterministische chaos' een mengeling is



Figuur 2a



Figuur 2b

fect'. Het vlindereffect blijkt met name in aanwezigheid van depressies zeer sterk te zijn. De lengte van de voorspelhorizon hangt dus samen met het weertype of de huidige toestand van de atmosfeer. Korte termijn voorspellingen van 1 of 2 dagen vooruit zijn over het algemeen redelijk betrouwbaar. Voorspellingen van zeg een week vooruit zijn alleen bij mooi weer betrouwbaar, en lange termijn voorspellingen van twee weken vooruit of meer zijn zeer onbetrouwbaar.

### ECONOMISCHE RELEVANTIE

Wat heeft dit alles nu met economie te maken? Veel! Het blijkt namelijk dat de ver-

tussen regelmatig en onregelmatig gedrag. Wel moet gezegd worden dat de voorbeelden die tot nu toe in de economische literatuur gegeven zijn, nog ver van de realiteit lijken te staan. Hoewel er langzaam een kentering optreedt lijken de meeste economen, in tegenstelling tot andere toepassingsgebieden, nog steeds niet overtuigd van het belang van chaotische dynamica. Een mogelijke oorzaak is het hardnekkig misverstand dat de 'chaostheorie' zich uitsluitend bezig zou houden met zuiver deterministische modellen, terwijl in de economie het toeval nooit helemaal uitgesloten kan worden. Veel eigenschappen van niet-lineaire dynamische model-

len blijken echter persistent tegen kleine verstoringen. Daarom lijkt de vraag of niet-lineaire economische wetmatigheden een significant deel van de fluctuaties in economische tijdreeksen kunnen verklaren dan ook een zeer zinvolle.

#### AANDELENKOERSEN

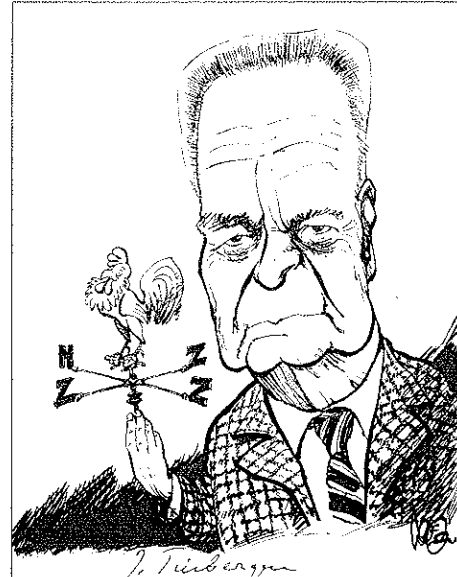
Beurskoersen kunnen vaak grillig en onvoorspelbaar gedrag vertonen. Je kunt je afvragen of dit door het toeval veroorzaakt wordt, of dat een deel van de fluctuaties door niet-lineariteiten verklaard kunnen worden. Er zijn door wiskundigen methoden ontwikkeld die dat onderscheid in principe kunnen maken, en deze methoden zijn recentelijk ook toegepast op aandelenkoersen en andere economische tijdreeksen. Een probleem hierbij is dat er zeer lange tijdreeksen (zeg 30000 of meer punten) nodig zijn, en dat de methoden zeer gevoelig zijn voor ruis. Enige voorzichtigheid met de conclusies van dit onderzoek is dus geboden, maar het lijkt erop dat de onderzochte aandelenkoersen geen 'random walk' volgen, d.w.z. niet alleen maar van het toeval afhangen, maar dat de data een onderliggende structuur vertonen die consistent is met een niet-lineair dynamisch model (van zes à zeven variabelen) met ruis. Mocht dat inderdaad het geval zijn, en zou men in staat zijn om te achterhalen welk niet-lineair model dat dan is, dan zou in principe een betere korte termijn voorspelling van aandelenkoersen mogelijk zijn. Een lange termijnvoorspelling blijft ook in dit geval echter principieel onmogelijk. Net als bij weersvoorspellingen zou het kunnen dat een voorspelhorizon van aandelenkoersen ook van de toestand van de beurs afhangt. Het is nog maar de vraag of inzicht in deze problematiek ook daadwerkelijk tot een betere korte termijn voorspelling van aandelenkoersen of andere economische variabelen zal leiden, maar het lijkt in elk geval de moeite waard om dit verder te onderzoeken. Een verschijnsel als een beurskrach blijft echter zeer moeilijk voorspelbaar. Wel zou inzicht in de niet-lineaire mechanismen die een beurskrach kunnen veroorzaken, kunnen bijdragen tot het voorkomen van een krach. Bovendien is het van een verschijnsel dat je niet kunt voorspellen prettig in elk geval te weten waarom je dat niet kunt.

Cars Hommes is universitair docent bij de vakgroep Kwantitatieve Methoden.

R

#### Adam Smith (1723-1790)

Engelse moraal filosoof, die vaak beschouwd wordt als de grondlegger van de politieke economie. Studeerde al op 17-jarige leeftijd af aan de Universiteit van Glasgow. Later werd hij daar hoogleraar in de logica respectievelijk de ethica. In *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations* (1776) legde hij de basis voor de klassiek-economische gedachte van het 'laissez-faire' in de economische politiek. Smith was ervan overtuigd dat het economisch systeem van nature in evenwicht is en derhalve een minimum aan overheidsingrijpen vereist. Ofschoon elk economisch subject gemotiveerd wordt door het eigen belang, handelt ieder in het belang van het geheel omdat in een systeem van de vrije markteconomie, waarvan de vrije concurrentie een onmisbaar ingrediënt vormt, elk individu gedreven wordt door de 'invisible hand'. Smith behandelde in het vijfdelige werk *The Wealth of Nations* naast door hem ontwikkelde economische theorieën ook geschiedenis, politiekeconomie en zelfs antropologie. Hij overleed vlak nadat hij had toegezien dat nagenoeg al zijn ongepubliceerde manuscripten door brand vernietigd werden.



#### Jan Tinbergen (1903-)

Modelbouwer, voorvechter van een meer gelijke wereldwijde inkomensverdeling. Van oorsprong natuurkundige. Hield zich aanvankelijk bezig met 'business cycle' theorieën. Bouwer van 's werelds eerste macro-economische modellen. Ontmoette veel scepsis tegen deze eerste econometrische modellen. Zo ook van Keynes. Tinbergen antwoordde daarop vriendelijk dat Keynes de gebruikte econometrische methoden totaal niet begreep. Nu worden zijn methoden gebruikt door beleidsmakers over de gehele wereld. Hij was de eerste directeur van het Centraal Planbureau (1945-1955). Daarna hoogleraar ontwikkelingseconomie aan de NEH (nu Erasmus Universiteit) en vervolgens hoogleraar Internationale Samenwerking in Leiden. Zijn werk staat dan vooral in het teken van de ontwikkelingseconomie en ontwapening. Adviseerde menig ontwikkelingsland en was voorzitter van de VN-commissie voor Ontwikkelingsplanning. Hij reisde de hele wereld rond om te ijveren voor een ambitieus internationaal ontwikkelingsplan dat de kloof tussen arme en rijke landen zou verkleinen. Ontving een eredoctoraat aan de Universiteit van Amsterdam in 1954 en won tezamen met Ragnar Frisch de eerste Nobelprijs voor de economie in 1969.

Bronnen: MARK BLAUG (1986), *Great Economists before Keynes & idem* (1985) after Keynes. Portretgalerij De Nederlandsche Bank, afd. W.O. & E.