



**UvA-DARE (Digital Academic Repository)**

**Chaotisch prijsgedrag in een eenvoudig economisch model**

Hommes, C.H.

*Published in:*  
Wetenschappelijk Tijdschrift voor Informatica en Modelbouw

[Link to publication](#)

*Citation for published version (APA):*  
Hommes, C. H. (1992). Chaotisch prijsgedrag in een eenvoudig economisch model. *Wetenschappelijk Tijdschrift voor Informatica en Modelbouw*, 1, 17-31.

**General rights**

It is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), other than for strictly personal, individual use, unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

**Disclaimer/Complaints regulations**

If you believe that digital publication of certain material infringes any of your rights or (privacy) interests, please let the Library know, stating your reasons. In case of a legitimate complaint, the Library will make the material inaccessible and/or remove it from the website. Please Ask the Library: <http://uba.uva.nl/en/contact>, or a letter to: Library of the University of Amsterdam, Secretariat, Singel 425, 1012 WP Amsterdam, The Netherlands. You will be contacted as soon as possible.

## Chaotisch prijsgedrag in een eenvoudig economisch model

Cars Hommes  
Rijksuniversiteit Groningen,  
Faculteit Economische Wetenschappen, Vakgroep Econometrie,  
Postbus 800, 9700 AV Groningen.

Economische tijdreeksen worden vaak gekenmerkt door een combinatie van regelmatig en onregelmatig gedrag. Traditioneel bestaan er in de economische wetenschap twee verschillende stromingen met betrekking tot de verklaring van deze fluctuaties. Volgens de eerste stroming (Slutsky, 1927; Frisch, 1933) worden de fluctuaties veroorzaakt door externe (exogene), toevallige "schokken" werkend op een stabiel economisch systeem. Zonder de exogene "schokken" zou de economie een stabiel evenwichts-groei-pad gaan volgen. Volgens de tweede endogene stroming (Kaldor, 1940; Hicks, 1950; Goodwin, 1951) worden de fluctuaties veroorzaakt door niet-lineaire economische wetmatigheden. Ook zonder externe "schokken" zouden economische variabelen oscillerend gedrag kunnen vertonen.

Hoewel niet-lineaire economische modellen in de jaren veertig en vijftig een belangrijke rol speelden, heeft in de economische wetenschap de laatste decennia het accent gelegen op een exogene verklaring van conjunctuurgolven. Het idee dat de economie beschreven moet worden door een (lineair) stabiel systeem onderhevig aan toevallige "schokken" lijkt dan ook wijdverbreid onder economen. De laatste jaren bestaat er echter een hernieuwde belangstelling voor een endogene verklaring van economische fluctuaties. De belangrijkste reden voor deze hernieuwde belangstelling is de ontdekking van het verschijnsel deterministische chaos, i.e. de ontdekking dat de tijdreeksen van eenvoudige niet-lineaire, deterministische modellen zeer grillig en onvoorspelbaar lijkend gedrag kunnen vertonen. Niet-lineaire economische modellen zouden dus niet alleen oscillerend gedrag, maar zelfs ook (een substantieel deel van) het grillig gedrag van economische variabelen kunnen verklaren.

Er wordt de laatste 10 jaar dan ook steeds meer onderzoek gedaan naar chaotisch gedrag in economische modellen en economische tijdreeksen. Voor een goed overzicht van deze literatuur verwijzen wij naar Lorenz (1989). In dit artikel geven wij een voorbeeld van een zeer eenvoudig niet-lineair economisch model waarin chaotisch prijsgedrag optreedt. Het model staat in de economie bekend als het "spinneweb-model", en het kan in de meeste boeken over economische dynamica gevonden worden. Het spinneweb-model is misschien wel het eenvoudigste, dynamische, economische model. We zullen laten zien dat in dit spinneweb-model chaotisch prijsgedrag op kan treden wanneer de vraag- en/of de aanbodskrommen niet-lineair zijn. Naast een aantal theoretische resultaten presenteren wij ook numerieke resultaten verkregen door simulatie van het model op een PC. Voor een veel gedetailleerdere analyse van het model verwijzen wij naar Hommes (1991a,b).

Dit artikel is als volgt samengesteld. In paragraaf 1 geven wij een definitie van chaotische dynamica. In paragraaf 2 presenteren wij het spinnewebmodel. Paragraaf 3 beschrijft de dynamica van het model. Tenslotte maken wij in paragraaf 4 enkele slotopmerkingen.

### 1. Een definitie van chaotische dynamica.

Er bestaan in de literatuur veel verschillende definities van chaos. In deze paragraaf geven wij de definitie die wij hier gebruiken. Voor de lezers die meer over deterministische chaos willen lezen geven wij een paar referenties. Voor een overzicht van belangrijke historische ontwikkelingen met betrekking tot de ontdekking van chaos verwijzen wij naar het, voor een breed publiek geschreven, boek van Gleick (1987). Een ander, voor "leken" geschreven, nederlands boek over chaos is van Tennekes (1990). Een wiskundige introductie in de chaotische dynamica kan bijvoorbeeld gevonden worden in Devaney (1989), Guckenheimer en Holmes (1986) of in het nederlandse boek van Broer en Verhulst (1990).

Voor de toepassing die wij willen behandelen is het voldoende om ons te beperken tot één-dimensionale, niet-lineaire differentievergelijkingen  $x_{t+1} = g(x_t)$ . Laat  $g$  een continue afbeelding van de reële rechte in zichzelf zijn. De baan van een punt  $x_0$  is de verzameling  $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}$ , met  $x_j = g^j(x_0)$ , waarbij  $g$  staat voor het  $j$  keer toepassen van de afbeelding  $g$ ; het punt  $x_0$  heet de *startwaarde* van de baan. Een punt  $x_0$  heet een *periodiek* punt met periode  $n$  als  $x_n = g^n(x_0) = x_0$  en  $x_k = g^k(x_0) \neq x_0$ , voor  $0 < k < n$ . De baan van een periodiek punt heet een *periodieke* baan, en de periode van een periodiek punt is precies het aantal verschillende punten van de bijbehorende periodieke baan. Een punt  $x_0$  heet *aperiodiek* als (1) de baan van  $x_0$  begrensd is, (2) de baan van  $x_0$  niet periodiek is en (3) de baan van  $x_0$  niet convergeert naar een periodieke baan.

Het begrip gevoelige afhankelijkheid van startwaarden speelt een belangrijke rol bij de definitie van chaotische dynamica. We zeggen dat de afbeelding  $g$  *gevoelige afhankelijkheid van startwaarden* met betrekking tot de verzameling  $K$  heeft, als er een positieve constante  $d$  bestaat, zodat voor elk punt  $x$  in  $K$  en elke omgeving  $U$  van  $x$ , er een punt  $y$  in  $U$  bestaat en een geheel getal  $N > 0$ , zodat de afstand tussen  $g^N(x)$  en  $g^N(y)$  groter is dan  $d$ . Deze definitie betekent dat er willikeurig dicht bij elk punt  $x$  in  $K$ , een punt  $y$  bestaat, zodat de banen van  $x$  en  $y$  niet altijd dicht bij elkaar blijven. In een systeem met gevoelige afhankelijkheid van startwaarden is het moeilijk om een lange termijn voorspelling te maken, zelfs met een computer die in 16 decimalen rekent.

We zeggen dat  $g$  een *chaotische afbeelding* is, als de volgende drie eigenschappen gelden: (1)  $g$  heeft oneindig veel periodieke punten met verschillende periode, (2) er bestaat een overaftelbare verzameling  $\Lambda$  van aperiodieke punten, en (3)  $g$  heeft gevoelige afhankelijkheid van startwaarden

met betrekking tot de verzameling  $\Lambda$ . Het bijbehorende dynamische systeem  $x_{t+1} = g(x_t)$  wordt in dat geval een chaotisch dynamisch systeem genoemd.

Voor welke één-dimensionale afbeeldingen  $g$  geldt nu dat  $x_{t+1} = g(x_t)$  een chaotisch dynamisch systeem is? We zullen met betrekking tot deze vraag slechts twee belangrijke opmerkingen maken. Ten eerste merken wij op dat als  $g$  *monotoon* (d.w.z. stijgend of dalend) is, er geen chaotische dynamica op kan treden. Als  $g$  monotoon is, dan zijn er voor de dynamica van  $x_{t+1} = g(x_t)$  drie mogelijkheden: (1) convergentie naar een evenwicht (2) convergentie naar een periode 2 baan of (3) een onbegrensde oplossing die naar plus of min oneindig gaat. Ten tweede willen wij nog een voldoende voorwaarde voor chaos geven. Deze voorwaarde staat bekend onder de naam "Periode 3 impliceert chaos", en werd geïntroduceerd door Li en Yorke (1975). Het resultaat van Li en Yorke houdt in dat, wanneer er een punt  $x_0$  bestaat waarvoor

$$g^2(x_0) < g^3(x_0) \leq x_0 < g(x_0) \quad (1)$$

dan is de afbeelding  $g$  chaotisch. Het resultaat geldt ook wanneer de  $<$  tekens in (1) vervangen worden door  $>$  tekens. Merk op dat dit resultaat zeer algemeen van aard is, aangezien de enige voorwaarde voor  $g$  is dat de afbeelding continu moet zijn. Aan de andere kant is het resultaat alleen geldig voor één-dimensionale afbeeldingen en niet voor hoger dimensionale afbeeldingen. Voor meer theorie over de dynamica van één-dimensionale differentievergelijkingen verwijzen naar Collet en Eckmann (1980) en Nusse (1988).

## 2. Het spinnweb-model.

Het spinnweb-model is wellicht het allereenvoudigste, dynamische economische model, en het kan in bijna alle boeken over economische dynamica gevonden worden. Het model beschrijft het gedrag van prijzen en hoeveelheden in een onafhankelijke markt, denk bijvoorbeeld aan een graanmarkt. Eén van de vergelijkingen van het model beschrijft de verwachting van de producenten omtrent de prijs. Er kunnen verschillende keuzes voor deze prijsverwachtingen gemaakt worden, en dit leidt dan ook tot verschillende varianten van het spinnweb-model. We zullen twee varianten van het model bekijken, namelijk het traditionele spinnweb-model, waarbij zogeheten naïeve prijsverwachtingen optreden, en het spinnweb-model met adaptieve verwachtingen.

### 2.1. Het traditionele spinnweb-model.

De oorspronkelijke variant van het model, het traditionele spinnweb-model, werd geïntroduceerd in de jaren dertig, zie bijvoorbeeld Tinbergen (1930). De naam "spinnweb-model" komt van de bekende econoom Kaldor,

aangezien volgens hem een grafische voorstelling van de tijdspaden van prijzen en hoeveelheden op een "spinneweb" leek, zie Kaldor (1934).

De variabelen van het model zijn de prijs  $p_t$ , de verwachte prijs  $\hat{p}_t$ , de vraag naar goederen  $q_t^d$  en het aanbod van goederen  $q_t^s$  allen in periode  $t$ . Bij

één periode kan men bijvoorbeeld denken aan een jaar. Het model wordt gegeven door de volgende vier vergelijkingen:

$$q_t^d = D(p_t) \quad (2)$$

$$q_t^s = S(\hat{p}_t) \quad (3)$$

$$q_t^d = q_t^s \quad (4)$$

$$\hat{p}_t = p_{t-1} \quad (5)$$

Volgens vergelijking (2) hangt de vraag naar goederen van de huidige prijs af. Vaak wordt aangenomen dat de vraagkromme  $D$  dalend is, dus dat de vraag afneemt als de prijs toeneemt. Volgens vergelijking (3) hangt het aanbod van goederen van de verwachte prijs af. De producenten hebben een bepaalde verwachting wat de prijs in periode  $t$  zal zijn, en op basis van die verwachting besluiten ze hoeveel er geproduceerd wordt. Vaak wordt de aanbodskromme  $S$  stijgend verondersteld. Vergelijking (4) is de markt-evenwichtsvergelijking. De vraag naar goederen is in elke periode gelijk aan het aanbod van goederen. In het model komen dus geen voorraden of tekorten voor. De laatste vergelijking beschrijft de verwachting van de producenten omtrent de prijs. In het traditionele spinneweb-model hebben de producenten naïeve prijsverwachtingen, dat wil zeggen dat de verwachte prijs gelijk is aan de voorgaande prijs. De producenten reageren dus uitsluitend op de voorgaande prijs.

Gegeven een beginprijs  $p_0$  legt het model nu alle toekomstige prijzen  $p_t$  en hoeveelheden  $q_t$  vast. Uit de vergelijkingen (2-5) kan eenvoudig de volgende differentievergelijking voor de prijsdynamica afgeleid worden:

$$p_t = D^{-1}S(p_{t-1}) \quad (6)$$

Het prijsgedrag wordt dus bepaald door een differentievergelijking  $p_t = f(p_{t-1})$ , waarbij  $f = D^{-1}S$  de samenstelling van de inverse-vraagfunctie  $D^{-1}$  en de aanbodsfunctie  $S$  is. Wat kan er nu over het prijsgedrag gezegd worden?

Laten wij om te beginnen eens kijken naar eventuele evenwichtsprijzen. Een prijs  $p_e$  heet een *evenwichtsprijs* als voor  $p_0 = p_e$  geldt dat  $p_t = p_e$  voor alle positieve waarden van  $t$ . De evenwichtsprijzen in het model zijn precies de prijzen waarbij de vraag- en aanbodskrommen elkaar snijden. Het blijkt dat een evenwichtsprijs  $p_e$  stabiel is als geldt dat

$$-1 < S'(p_e)/D'(p_e) < 1 \quad (7)$$

waarbij  $S'(p_e)$  en  $D'(p_e)$  de afgeleiden van de aanbods- en de vraagkromme in de evenwichtsprijs  $p_e$  zijn. Wat gebeurt er als de evenwichtsprijs instabiel is?

Het antwoord op deze vraag hangt af van de keuze van de vraag- en aanbodskrommen. We hebben reeds opgemerkt dat de vraag meestal dalend en het aanbod meestal stijgend verondersteld worden. In dat geval zijn er voor het prijsgedrag, behalve convergentie naar een stabiel evenwicht, in feite slechts twee andere mogelijkheden, namelijk (i) convergentie naar een stabiele periode 2 baan, of (ii) exploderend prijsgedrag, dat wil zeggen dat de prijs naar plus of min oneindig gaat. De reden hiervoor is dat, wanneer vraag en aanbod monotoon (d.w.z. stijgend of dalend) zijn, ook de functie  $f = D^{-1}S$ , die de differentievergelijking in (6) bepaalt, in dat geval monotoon is. Wanneer daarentegen tenminste één van de vraag- of de aanbodskrommen niet-monotoon is, kan het prijsgedrag veel gecompliceerder zijn en kan wel chaotisch prijsgedrag optreden, zie Artstein (1983) en Jensen en Urban (1984). In dat geval is namelijk ook de afbeelding  $f = D^{-1}S$  een niet-monotone functie en kan er daarom chaotische dynamica optreden.

Samenvattend kan dus gezegd worden dat in het traditionele spinnweb-model met niet-lineaire, monotone vraag- en aanbodskrommen de prijsdynamica altijd regelmatig is. Chaotisch prijsgedrag kan alleen optreden wanneer minstens één van de vraag- of aanbodskrommen niet-monotoon is.

## 2.2. Het spinnweb-model met adaptieve verwachtingen.

Nerlove (1958) introduceerde zogeheten adaptieve prijsverwachtingen in het spinnweb-model. Het *spinnweb-model met adaptieve verwachtingen* wordt gegeven door de volgende vier vergelijkingen:

$$q_t^d = D(p_t) \quad (2)$$

$$q_t^s = S(\hat{p}_t) \quad (3)$$

$$q_t^d = q_t^s \quad (4)$$

$$\hat{p}_t = p_{t-1} + w(p_{t-1} - \hat{p}_{t-1}) \quad 0 < w < 1 \quad (5a)$$

De vergelijkingen (2-4) zijn precies hetzelfde als in het traditionele spinnweb-model. De verwachting van de producenten omtrent de prijs wordt beschreven door (5a). De producenten hebben zogeheten adaptieve prijsverwachtingen. Wanneer de voorgaande prijs  $p_{t-1}$  hoger is dan de voorgaande verwachte prijs  $\hat{p}_{t-1}$ , dan wordt de nieuwe verwachte prijs verhoogd; is de voorgaande prijs  $p_{t-1}$  lager dan de voorgaande verwachte prijs  $\hat{p}_{t-1}$ , dan wordt de nieuwe verwachte prijs verlaagd. De verwachte prijs wordt dus aangepast in de richting van de voorgaande echte prijs. Vergelijking

(5a) kan ook geschreven worden in de vorm  $\hat{p}_t = (1-w)\hat{p}_{t-1} + w p_{t-1}$ , zodat de verwachte prijs dus gelijk is aan een gewogen gemiddelde van de voorgaande verwachte prijs en de voorgaande prijs; de parameter  $w$  wordt de *gewichtsfactor* van de adaptieve verwachtingen genoemd. Merk op dat voor  $w = 1$  geldt dat de verwachte prijs gelijk is aan de voorgaande prijs. Voor  $w = 1$  hebben de producenten dus naïeve prijsverwachtingen, zodat het traditionele spinnweb-model een speciaal geval is van het spinnweb-model met adaptieve verwachtingen. Tenslotte merken wij nog op dat adaptieve prijsverwachtingen er op neerkomen dat de verwachte prijs een gewogen gemiddelde is van alle prijzen uit het verleden, waarbij de meest recente prijzen het hoogste gewicht krijgen.

Gegeven een prijs  $p_0$ , een verwachte prijs  $\hat{p}_0$  of een hoeveelheid  $q_0$ , legt het model nu alle toekomstige prijzen  $p_t$ , verwachte prijzen  $\hat{p}_t$  en hoeveelheden  $q_t$  vast. Uit bovenstaande vier vergelijkingen kan eenvoudig een differentievergelijking voor de dynamica van de verwachte prijzen afgeleid worden. Uit (2-4) volgt dat  $p_t = D^{-1}S(\hat{p}_t)$ . Substitutie van deze uitdrukking in vergelijking (5a) voor  $t+1$  geeft

$$\hat{p}_{t+1} = (1-w)\hat{p}_t + wD^{-1}S(\hat{p}_t) \quad (8)$$

Op analoge wijze kan een differentievergelijking voor de dynamica van de prijs of de hoeveelheid afgeleid worden. We zullen ons echter concentreren op de differentievergelijking voor de verwachte prijs in (8), aangezien deze het eenvoudigst te analyseren is. Kwalitatief zijn de dynamica van prijzen en hoeveelheden hetzelfde als de dynamica van de verwachte prijzen. Wat kan er nu over het (verwachte-)prijsgedrag gezegd worden?

Een evenwichtsprijs  $p_e$  in het model is een prijs waarbij de vraag- en aanbodskrommen elkaar snijden. Het blijkt dat een evenwichtsprijs  $p_e$  stabiel is als geldt dat

$$1 - \frac{2}{w} < S'(p_e)/D'(p_e) < 1 \quad (9)$$

waarbij  $S'(p_e)$  en  $D'(p_e)$  de afgeleiden van de aanbods- en de vraagkrommen in de evenwichtsprijs  $p_e$  zijn. Merk op dat  $1 - \frac{2}{w} < -1$ , aangezien  $w$  tussen 0 en 1 ligt, zodat deze stabiliteitsconditie ruimer is dan de overeenkomstige stabiliteitsconditie (7) in het traditionele spinnweb-model. Wat gebeurt er als de evenwichtsprijs instabiel is? Kan er chaotisch prijsgedrag optreden, wanneer de vraag- en aanbodskrommen beide monotoon zijn?

### 3. Dynamica spinnweb-model met adaptieve verwachtingen.

In deze paragraaf presenteren wij numerieke en theoretische resultaten met betrekking tot het dynamisch gedrag van prijzen en hoeveelheden in

het spinneweb-model met adaptieve verwachtingen. De numerieke resultaten zijn verkregen door simulatie van het model op een PC, en dienen als aanvulling op en illustratie van de theoretische resultaten.

### 3.1. Keuze van de vraag- en aanbodskromme.

De dynamica van prijzen en hoeveelheden ligt nog niet eenduidig vast, aangezien wij nog geen expliciete keuze voor de vraag- en aanbodskrommen gemaakt hebben. We zullen zowel de vraag- als de aanbodskromme monotoon kiezen.

Met betrekking tot de aanbodscurve gaan wij uit van de volgende economische overwegingen: (EC1) het aanbod is een stijgende functie van de (verwachte) prijs; (EC2) bij lage prijzen neemt het aanbod slechts langzaam toe, vanwege vaste productiekosten; (EC3) bij hoge prijzen neemt het aanbod slechts langzaam toe vanwege een beperkte productiecapaciteit. Op basis van deze economische overwegingen kiezen wij een niet-lineaire, stijgende aanbodskromme. De eenvoudigste kromme die aan deze aannames voldoet is een S-vormige aanbodskromme  $S$ , met de eigenschap dat  $S$  een uniek buigpunt  $\bar{p}$  heeft, zodat (i) de afgeleide  $S'$  is maximaal in  $\bar{p}$ ; (ii) voor  $p < \bar{p}$  neemt  $S$  toe van 0 tot de maximale waarde in  $\bar{p}$ ; (iii) voor  $p > \bar{p}$  neemt  $S$  af van de maximale waarde in  $\bar{p}$  tot 0. Voor de analyse van de dynamica blijkt het handig om een nieuw coördinatenstelsel te kiezen, met het buigpunt van de aanbodskromme als oorsprong. Merk op dat met betrekking tot deze nieuwe oorsprong de (verwachte) "prijzen" en "hoeveelheden" negatief kunnen zijn; met betrekking tot de "echte" oorsprong zijn (verwachte) prijzen en hoeveelheden altijd positief. We schrijven  $x$  voor de (verwachte) prijs ten opzichte van de nieuwe oorsprong. Voor onderstaande model-simulaties hebben wij de volgende S-vormige aanbodskromme gekozen

$$S\lambda(x) = \arctan(\lambda x) \quad \lambda > 0 \quad (10)$$

Soortgelijke resultaten worden echter verkregen voor een algemene klasse van S-vormige, monotone aanbodskrommen. Merk op dat de parameter  $\lambda$  een maat is voor de niet-lineariteit van de S-vorm van de aanbodskromme; zie figuur 1.

Voor de vraagkromme kiezen wij de dalende, lineaire rechte

$$D(x) = a - bx \quad a \in \mathbb{R}, b > 0 \quad (11)$$

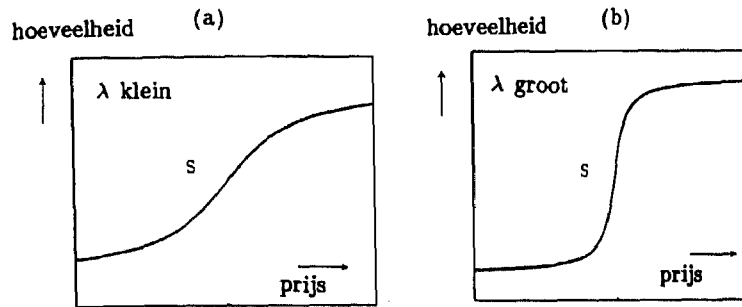
De reden om een lineaire vraagkromme te kiezen is om het model zo eenvoudig mogelijk te houden. Door een lineaire vraagkromme te kiezen kunnen wij het effect van de niet-lineariteit van de aanbodskromme op de prijsdynamica onderzoeken.



De dynamica van de verwachte prijzen wordt beschreven door de differentievergelijking  $p_{t+1} = f(p_t)$  in (8). Voor de keuzes van de aanbodskromme in (10) en de vraagkromme in (11) wordt deze differentievergelijking gegeven door:

$$x_{t+1} = (1-w)x_t + w[(a - \arctan(\lambda x_t))/b] \quad (12)$$

De differentievergelijking bevat vier parameters, namelijk de hoogte van de vraagkromme (parameter  $a$ ), de helling van de vraagkromme (parameter  $b$ ), de gewichtsfactor van de adaptieve verwachtingen (parameter  $w$ ) en de parameter  $\lambda$  die de niet-lineariteit van de S-vorm van de aanbodskromme bepaalt. Wat kan er nu over de tijdspaden van deze differentievergelijking gezegd worden, en hoe hangt de dynamica van de vier parameters af?



Figuur 1. De S-vormige aanbodskromme voor kleine  $\lambda$  (a) en voor grote  $\lambda$  (b).

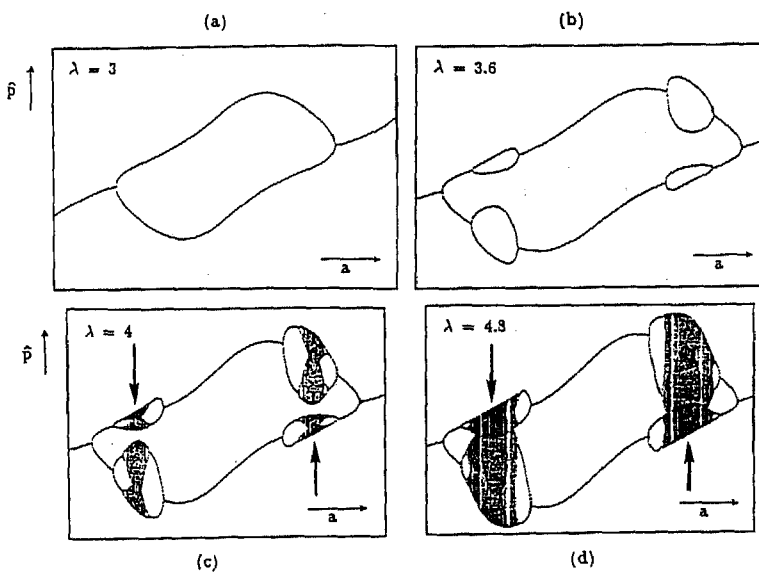
### 3.2. De parameters $a$ en $\lambda$ .

In deze sectie onderzoeken wij het volgende probleem: *Hoe verandert de prijsdynamica wanneer de vraagkromme omhoog geschoven wordt?* We onderzoeken dit probleem bij verschillende S-vormen van de aanbodskromme. Met andere woorden, wij onderzoeken hoe de dynamica verandert als de parameter  $a$  toeneemt, voor verschillende keuzes van de parameter  $\lambda$ . Voor de numerieke resultaten in deze sectie zijn de helling van de vraagkromme  $-b = -0.25$  en de gewichtsfactor van de adaptieve verwachtingen  $w = 0.3$  vast gekozen.

Een nuttige simulatie-methode om inzicht te krijgen in de dynamica van een niet-lineair dynamisch model is de constructie van zogeheten bifurcatie-diagrammen. Een bifurcatie is een kwalitatieve verandering in de dynamica van een model als een parameter verandert. Denk bijvoorbeeld aan een even-

wicht dat instabiel wordt en/of aan een nieuwe periodieke baan die ontstaat. Een bifurcatie-diagram geeft aan hoe de dynamica van het model verandert wanneer een parameter verandert.

Figuur 2 toont bifurcatie-diagrammen van de differentievergelijking in (12), met betrekking tot de parameter  $a$ ,  $-1.25 \leq a \leq 1.25$ , voor vier verschillende waarden van de parameter  $\lambda$ . De diagrammen in figuur 2 zijn als volgt geconstrueerd. Voor  $a = -1.25$  en een bepaalde startwaarde  $x_0$  worden, zeg de eerst 51 punten van de baan  $x_0, x_1, \dots, x_{50}$  berekend, maar niet geplot. Vervolgens worden, zeg de volgende 200 punten van de baan,  $x_{51}, x_{52}, \dots, x_{250}$  berekend en geplot. Daarna wordt de parameter  $a$  een klein beetje, zeg met 0.01 verhoogd, wordt als startwaarde weer het punt  $x_0$  genomen, en na een beginstuk van 51 punten worden de volgende 200 punten van de baan weer geplot. Deze procedure wordt herhaald, totdat de parameter  $a$  zijn maximale waarde 1.25 bereikt. Het resultaat is een figuur die laat zien hoe het lange termijn gedrag van het model van de parameter  $a$  afhangt. Het aantal niet-geplote punten (51) en het aantal geplote punten (200) per parameterwaarde zijn vrij groot gekozen om een nauwkeurige figuur te krijgen. Deze waarden kunnen natuurlijk ook kleiner gekozen worden, b.v. 10 resp. 50; in dat geval worden ruwweg dezelfde plaatjes verkregen.



Figuur 2. Bifurcatie-diagrammen m.b.t. de parameter  $a$ ,  $-1.25 \leq a \leq 1.25$ , voor vier verschillende waarden van de parameter  $\lambda$ .

In figuur 2a is de parameter  $\lambda = 3$ . Voor kleine en grote waarden van de parameter  $a$  is er een stabiel evenwicht, en voor tussenliggende  $a$ -waarden een stabiele periode 2 baan. Voor  $a \approx -0.9$  treedt een zogeheten periode verdubbelingsbifurcatie op: het stabiele evenwicht wordt instabiel en er ontstaat een nieuwe stabiele periode 2 baan. Voor  $a \approx 0.9$  daarentegen treedt er een zogeheten periode halveringsbifurcatie op: de (stabiele) periode 2 baan verdwijnt en het instabiele evenwicht wordt weer stabiel. Voor  $\lambda = 3.6$  (figuur 2b) is de situatie iets gecompliceerder. Behalve de eerder genoemde bifurcaties treden er periode verdubbelingsbifurcaties van periode 2 naar 4 en periode halveringsbifurcaties van periode 4 naar 2 op. Chaotisch gedrag treedt in de figuren 2a en 2b echter niet op. Voor  $\lambda = 4$  ontstaat wel chaotisch gedrag (aangegeven door pijlen in figuur 2c), na oneindig veel periode verdubbelingsbifurcaties. Er is echter nog een zekere regelmaat in de chaotische dynamica, aangezien de chaotische tijdspaden waarden aannemen in twee disjuncte intervallen (de zwarte gebieden in figuur 2c). De chaotische tijdreeksen worden gekenmerkt door regelmatig alternerend gedrag, d.w.z. dat een maximum en een minimum elkaar voortdurend afwisselen. De tijdreeksen die verkregen worden door alleen naar de even perioden (zeg de maxima) of alleen naar de oneven perioden (zeg de minima) te kijken zien er echter grillig en onvoorspelbaar uit. Voor  $\lambda = 4.8$  tenslotte treedt chaotisch gedrag op waarbij het regelmatig alternerend gedrag verdwenen is (zie de pijlen in figuur 2d). De chaotische tijdspaden zien er dan zeer grillig en onvoorspelbaar uit. Het bifurcatie-scenario wordt gekenmerkt door oneindig veel periode verdubbelingsbifurcaties en oneindig veel periode halveringsbifurcaties.

Samenvattend kan gezegd worden dat, naarmate de parameter  $\lambda$  (een maat voor de niet-lineariteit van de S-vorm van de aanbodskromme) groter is, het bifurcatie-scenario met betrekking tot de parameter  $a$  (de hoogte van de vraagkromme) gecompliceerder wordt.

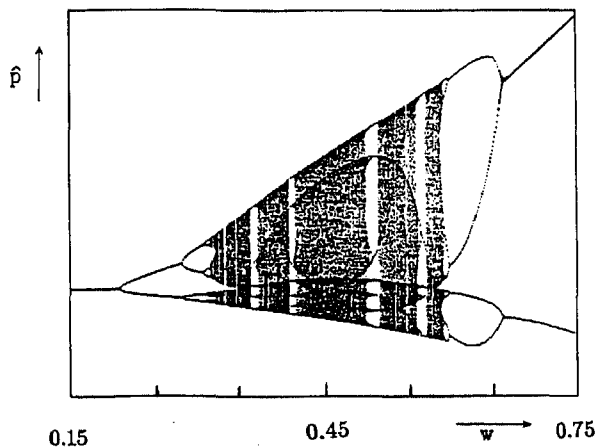
### 3.3 De parameter $w$ .

Voor een goed begrip van de dynamica van het spinneweb-model met adaptieve verwachtingen, is het cruciaal om te onderzoeken hoe de dynamica van de gewichtsfactor  $w$  van de adaptieve verwachtingen afhangt. In deze sectie gaan wij op dit probleem in. Voor de andere parameters kiezen wij de vaste waarden  $a = 0.8$ ,  $b = 0.25$  en  $\lambda = 4$ .

In figuur 3 is een bifurcatiediagram met betrekking tot de parameter  $w$ ,  $0.15 \leq w \leq 0.75$ , gegeven. Voor  $w < 0.2$  is er een stabiel evenwicht. Als  $w$  toeneemt treedt de bekende periode verdubbelings-route naar chaos op. Chaotische dynamica treedt bijvoorbeeld op voor  $0.33 < w < 0.57$ . Vervolgens ontstaat er, na oneindig veel periode halveringsbifurcaties, uiteindelijk een stabiele periode 2 baan voor  $w \geq 0.67$ . We brengen nog eens in herinnering dat de verwachte prijs  $\hat{p}_t$  van de producenten gelijk is aan een gewogen gemiddelde van de voorgaande verwachte prijs  $\hat{p}_{t-1}$  en de voorgaande prijs  $p_{t-1}$ , namelijk  $\hat{p}_t = (1-w)\hat{p}_{t-1} + wp_{t-1}$ . Uit figuur 3 volgt

### Cars Hommes Chaotisch Prijsgedrag in een eenvoudig economisch model

dat er voor  $w$  dicht bij 0 en  $w$  dicht bij 1 regelmatig prijsgedrag optreedt, terwijl er voor tussenliggende  $w$ -waarden (b.v. voor  $w$  dicht bij 0.45) grillig, chaotisch prijsgedrag optreedt. Voor  $w$  dicht bij 0 geldt dat de verwachte prijs ongeveer gelijk is aan de voorgaande verwachte prijs, terwijl voor  $w$  dicht bij 1 de verwachte prijs ongeveer gelijk is aan de voorgaande prijs. Je zou dus kunnen zeggen dat het grillige prijsgedrag het gevolg is van twijfel van de producenten tussen de voorgaande verwachte prijs en de voorgaande prijs.



*Figuur 3. Bifurcatie-diagram m.b.t. de gewichtsfactor  $w$ .*

In het spinneweb-model dat wij hier bekijken is de vraagkromme lineair en de aanbodskromme niet-lineair (maar wel monotoon). Ter vergelijking willen wij een opmerking maken met betrekking tot het model met lineaire vraag- en aanbodskrommen. Men kan zich afvragen hoe het bifurcatiediagram met betrekking tot de parameter  $w$  er in het lineaire geval uitziet. In dat geval treedt er in feite slechts één bifurcatie op voor een bepaalde kritische waarde  $w_{crit}$ . Voor  $0 \leq w \leq w_{crit}$  is er een stabiel evenwicht, voor  $w_{crit} < w \leq 1$  onbegrensde, divergente prijsoscillaties en voor  $w = w_{crit}$  is er bij elke prijs (behalve voor de evenwichtsprijs) een periode 2 baan. We zien dus in figuur 3 dat voor een niet-lineaire, monotone aanbodskromme het bifurcatie-scenario met betrekking tot  $w$  oneindig veel gecompliceerder kan zijn dan in het lineaire geval.

Voor  $w = 1$  is het model met adaptieve verwachtingen precies gelijk aan het traditionele spinneweb-model. Merk op dat de stabiliteitsconditie voor het evenwicht voor  $w < 1$  in vergelijking (9) ruimer is dan de stabiliteitsconditie

voor het evenwicht in vergelijking (7) voor het traditionele spinnweb-model. In het lineaire geval hebben adaptieve verwachtingen dus een stabiliserende invloed op de prijsdynamica in het spinnweb-model. In feite illustreert figuur 3 een analoog resultaat in het geval van een niet-lineaire, monotone aanbodskromme. Voor  $w$ -waarden dicht bij 1 is er een stabiele periode 2 baan met een grote amplitude. Wanneer de parameter  $w$  nu afneemt, wordt de amplitude van de stabiele periode 2 baan steeds kleiner. Op zeker moment wordt de periode 2 baan echter instabiel en ontstaat een stabiele periode 4 baan. Als  $w$  verder afneemt neemt ook de amplitude van deze periode 4 baan af. De periode 4-baan wordt echter op zeker moment ook instabiel en er ontstaat een stabiele periode 8 baan. Wanneer  $w$  verder afneemt wordt de amplitude van de prijsfluctuaties steeds kleiner, terwijl het karakter van de prijsfluctuaties steeds grilliger wordt. Daarna wordt, als  $w$  nog verder afneemt, het prijsgedrag weer regelmatig totdat er uiteindelijk een stabiel evenwicht optreedt. Je zou dus kunnen zeggen dat, in het geval van niet-lineaire vraag- en/of aanbodskrommen, adaptieve verwachtingen een stabiliserende invloed hebben op de amplitude van de prijsfluctuaties, maar een destabiliserende invloed kunnen hebben op het karakter van de prijsfluctuaties. Een meetkundige verklaring voor dit verschijnsel wordt gegeven in Hommes (1991b).

### 3.4. Theoretische resultaten.

In het voorgaande hebben wij numerieke resultaten met betrekking tot de dynamica van het spinnweb-model met adaptieve verwachtingen gegeven. In deze paragraaf geven wij een theoretisch resultaat, die de numerieke resultaten voor een belangrijk deel verklaart. De dynamica van het model wordt bepaald door de differentievergelijking  $x_{t+1} = f_{a,b,\lambda,w}(x_t)$  in vergelijking (12), waarbij de functie  $f_{a,b,\lambda,w}$  gegeven wordt door

$$f_{a,b,\lambda,w}(x) = (1-w)x + w[(a - \arctan(\lambda x))/b] \quad (13)$$

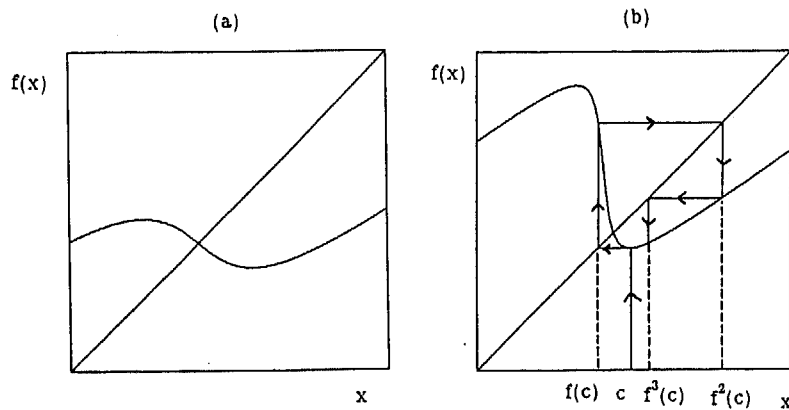
De functie  $f_{a,b,\lambda,w}$  hangt van de vier parameters  $a$ ,  $b$ ,  $\lambda$  en  $w$  af. We hebben het volgende resultaat:

**STELLING.** *Neem de parameters  $b > 0$  en  $0 < w < 1$  vast. Indien  $\lambda$  voldoende groot is, dan bestaan er  $a$ -waarden  $a_1 < a_2 < 0 < a_3 < a_4$  zodat voor de dynamica van  $x_{t+1} = f_{a,b,\lambda,w}(x_t)$  het volgende geldt:*

- (i) voor  $a \leq a_1$  is er een stabiel evenwicht.
- (ii) voor een interval van  $a$ -waarden rond  $a_2$  is de dynamica chaotisch.
- (iii) voor een interval van  $a$ -waarden rond 0 is er een stabiele periode 2 baan
- (iv) voor een interval van  $a$ -waarden rond  $a_3$  is de dynamica chaotisch.
- (v) voor  $a > a_4$  is er een stabiel evenwicht.

Een bewijs van deze stelling is te vinden in Hommes (1991b). Eigenschappen

(ii) en (iv) kunnen bewezen worden door gebruik te maken van het resultaat "Periode 3 impliceert chaos" van Li en Yorke (1975), zie paragraaf 1.



Figuur 4. Grafieken van  $f_{a,b,\lambda,w}$  voor verschillende waarden van  $a$  en  $\lambda$ .  
 (a)  $a = 0$  en  $\lambda = 1.25$ , (b)  $a = 1$  en  $\lambda = 9$ .

Figuur 4 toont twee grafieken van de functie  $f_{a,b,\lambda,w}$  voor verschillende waarden van de parameters  $a$  en  $\lambda$ . Merk op dat een toename van  $a$  niets anders betekent dan dat de grafiek van  $f_{a,b,\lambda,w}$  omhoog schuift. In figuur 4a is de parameter  $\lambda$  vrij klein, terwijl in figuur 4b de parameter  $\lambda$  vrij groot is. De parameter  $\lambda$  is dus van invloed op de "niet-lineariteit" van  $f_{a,b,\lambda,w}$ . Figuur 4b laat zien dat  $f(c) < c < f^3(c) < f^2(c)$ , waarbij  $f = f$  en  $c$  de  $x$ -waarde waarvoor  $f_{a,b,\lambda,w}$  een lokaal minimum heeft. Er is dus aan de conditie van Li en Yorke voldaan en daarom moet er sprake zijn van chaotische dynamica.

Uit bovenstaande stelling volgt in feite dat, voor voldoende grote  $\lambda$ , het bifurcatie-scenario met betrekking tot de parameter  $a$  minstens zo gecompliceerd moet zijn als in figuur 2d. Bovendien kan de stelling ook gebruikt worden om aan te tonen dat voor voldoende grote  $\lambda$  en voor een geschikte keuze van de parameter  $a$ , het bifurcatie-scenario met betrekking tot de parameter  $w$  minstens zo gecompliceerd moet zijn als in figuur 3. Op deze wijze verklaart de stelling dus de eerder gepresenteerde numerieke resultaten.

#### 4. Slotopmerkingen.

We hebben een zeer eenvoudig economisch model gepresenteerd waarin de tijdspaden van prijzen en hoeveelheden zich grillig en onvoorspelbaar kunnen gedragen. Wat betekent dit nu voor de economische wetenschap?

Laten wij om te beginnen opmerken dat het model niet in de eerste plaats bedoeld is als realistische beschrijving van zeg het prijsgedrag in een graanmarkt. Daarvoor worden te veel zaken buiten beschouwing gelaten. Het model lijkt gewoon te eenvoudig om waar te kunnen zijn. Dit eenvoudige voorbeeld illustreert echter wel dat het nogal wat uitmaakt of vraag- en aanbod lineair dan wel niet-lineair verondersteld worden. Het voorbeeld leert dan ook dat voorzichtigheid bij het trekken van conclusies op basis van lineaire modellen op zijn plaats lijkt. Verder illustreert dit voorbeeld dat onder zeer eenvoudige en veel gebruikte aannames in de economie chaotische dynamica kan optreden. Het overbekende vraag-aanbod mechanische tezamen met adaptieve verwachtingen kan reeds tot chaos leiden, als één van de vraag- of aanbodskrommen niet-lineair verondersteld wordt. Deze constatering lijkt van fundamenteel belang voor de economische wetenschap.

#### Literatuur

- Artstein, Z. (1983) Irregular cobweb dynamics, *Economics Letters* 11, 15-17.
- Broer, H.W. en Verhulst, F. (red.) (1990) *Dynamische systemen en chaos. Een revolutie vanuit de wiskunde*, Epsilon uitgaven, Utrecht.
- Collet, P. and Eckmann, J.-P. (1980) *Iterated maps on the interval as dynamical systems*, Birkhauser, Boston, MA.
- Devaney, R.L. (1989) *An introduction to chaotic dynamical systems*, Second edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City.
- Frisch, R. (1933) *Propagation problems and impulse problems in dynamic economics*, In: Economic essays in honor of Gustav Cassel, George Allen and Unwin, London 1933, Reprinted in: Gordon, R.A. and Klein, L.R. (eds.) *Readings in business cycles*, R.D. Irwin, Inc., Homewood, Illinois 1965, 155-185.
- Gleick, J. (1987) *Chaos. Making a new science*, Viking Penguin Inc., New York.
- Goodwin, R.M. (1951) The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles, *Econometrica* 19, 1-17.
- Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1986) *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Second revised and corrected edition, Springer Verlag, New York.
- Hicks, J.R. (1950) *A contribution to the theory of the trade cycle*, Clarendon Press, Oxford.
- Hommes, C.H. (1991a) Adaptive learning and roads to chaos. The case of the cobweb, *Economics Letters* 36, 127-132.

- Hommes, C.H. (1991b) *Chaotic dynamics in economic models. Some simple case studies*, Groningen Theses in Economics, Management & Organization, Wolters-Noordhoff Groningen.
- Jensen, R.V. and Urban, R. (1984) Chaotic price behavior in a nonlinear cobweb model, *Economics Letters* 15, 235-240.
- Kaldor, N. (1934) A classificatory note on the determinateness of equilibrium, *Review of Economic Studies* 1, 122-136
- Kaldor, N. (1940) A model of the trade cycle, *Economic Journal* 50, 78-92.
- Li, T.-Y. and Yorke, J.A. (1975) Period three implies chaos, *American Mathematical Monthly* 82, 985-992.
- Lorenz, H.-W. (1989) *Nonlinear dynamical economics and chaotic motion*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 334, Springer-Verlag, Berlin.
- Nerlove, M. (1958) Adaptive expectations and cobweb phenomena, *Quarterly Journal of Economics* 72, 227-240.
- Nusse, H.E. (1988) Qualitative analysis of the dynamics and stability properties for Axiom A maps, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 136, 74-106.
- Slutzky, E. (1927/1937) The summation of random causes as the source of cyclic processes, *Econometrica* 5, 105-146 (revised and translated version from the original Russian version in: *Problems of economic conditions*, ed. by The Conjecture Institute, Moskva (Moscow), Vol. 3, No. 1, 1927).
- Tennekes, H. (red.) (1990) *De vlinder van Lorenz. De verrassende dynamica van chaos*, Aramith Uitgevers, Bloemendaal.
- Tinbergen, J. (1930) Bestimmung und Deutung von Angebotskurven. Ein Beispiel, *Zeitschrift für Nationalökonomie band I*, heft 5, 669-679.