Onderzoekingen over delta cephei en over het cepheidenprobleem

Reesinck, J.J.M.

III

THEORIE VAN DE ATMOSPHEER VAN EEN PULSEERENDE STER

In de inleiding hebben we gezien dat een der theorieën ter verklaring van de verschijnselen, die men bij de cepheiden waarneemt is de z.g. pulsatietheorie, waarin wordt aangenomen dat een cepheide een ster is, die in radieele staande trilling verkeert.

Alvorens de trillingen van een ster te gaan beschouwen willen we eerst in het kort bespreken hoe men zich het evenwicht van een ster voorstelt.

Men neemt op goede gronden aan, dat *de sterren verkeeren in stralingsevenwicht*, d.w.z. dat de temperatuurverdeeling zoodanig is dat zij door de daarbij passende straling niet meer veranderd wordt, dus dat de toestand stationnair is. In dat geval geldt voor ieder deel van de ster de vergelijking:

$$\text{uitgestraalde energie} = \\ = \text{geabsorbeerde energie} + \text{geproduceerde energie}, \qquad (1)$$

waarin de uitgestraalde en geabsorbeerde energie volgens bekende physische wetten moeten worden ingevuld.

K. SCHWARZSCHILD [41]) heeft de *theorie* opgesteld *van het stralingsevenwicht van een vlakke atmospheer,* waarin de versnelling der zwaartekracht constant is en waarin geen energie wordt geproduceerd, in de vereenvoudigende onderstelling

dat er alleen straling plaats heeft radieel naar buiten en naar binnen. E. A. MILNE [42]) heeft hetzelfde vraagstuk behandeld doch zonder die laatste vereenvoudiging, waardoor het, mathematisch veel lastiger werd, terwijl SCHWARZSCHILD's uitkomsten voor de verdeeling van temperatuur en druk slechts zeer onbelangrijk gewijzigd werden.

De *theorie van een gasbol in stralingsevenwicht* is uitgewerkt door A. S. EDDINGTON [43]). Behalve in de buitenste lagen komt zulk een gasbol overeen met een der polytrope modellen van EMDEN [44]). Op de buitenste lagen echter, kunnen EDDINGTON's formules niet worden toegepast. Het bleek dat de absorptiecoefficient in de sterren zeer groot moet zijn (ongeveer 24), wat ook uit physische gronden waarschijnlijk is.

Ook bij een pulseerende ster is de straling de voornaamste vorm van energieoverbrenging Stralingsevenwicht is er in een trillende ster niet, integendeel is de temperatuur T, in elk punt, een functie van de tijd. Zooals men echter een dynamisch vraagstuk tot een statisch terug brengt, door het invoeren van traagheidskrachten, tegengesteld aan de versnellingen, zoo kan men ook in het algemeen vgl. (1) toepassen, mits men aan de geproduceerde energie, per massa- en tijdseenheid, nog den term $-c_v\dot{T}$ toevoegt, waarin c_v de soortelijke warmte is bij constant volume.

De geproduceerde energie" bestaat dus uit 3 deelen: 1e De „gewone" energie productie die ook in den evenwichtstoestand bestaat.

2e De energieproductie door de contractie. Deze is per massa- en tijdseenheid $HT\dot{\rho}/\rho$, waarin H de gasconstante voorstelt voor één massaeenheid, en ρ de dichtheid.

3e De term $-c_v\dot{T}$.

EDDINGTON [45]) heeft de *pulsaties van een gasbol* theoretisch behandeld. Hij heeft zich daarbij beperkt tot enkelvoudig harmonische pulsaties met infinitesimale amplitude. Doch zelfs dit probleem levert, wanneer men met de invloed van de straling rekening houdt onoverkomelijke mathematische moeielijkheden. Daarom onderstelt EDDINGTON dat bij de groote ondoorschijnendheid van het binnenste van een ster, de pulsaties adiabatisch verloopen, d.w.z., dat voor een bepaald element van de ster voldaan wordt aan de wet van POISSON.

Het is gemakkelijk in te zien waarom deze onderstelling zulk een groote vereenvoudiging geeft. Stelt men voor de afstand r van een bepaald element van de ster tot het middelpunt:

$$r = r_0 (1 + r_1) = r_0 (1 + r_s \sin nt),$$

waarin r_0 de waarde in de evenwichtstoestand beteekent, en analoog voor de druk en de andere grootheden:

$$p = p_0 (1 + p_1) = p_0 (1 + p_s \sin nt),$$
$$T = T_0 (1 + T_1) = T_0 (1 + T_s \sin nt), \text{ enz.}$$

dan blijkt het, dat het bij het strenge probleem onmogelijk is r_s, p_s, T_s, enz., zoo te bepalen als functie van r_0, dat aan de voorwaarden van het vraagstuk voldaan wordt, omdat in vgl. (1), eerste afgeleiden naar de tijd voorkomen, waardoor cosinustermen optreden.

Vervangt men echter vgl. (1) door de wet van POISSON, dan treedt er in de verschillende voorwaarden enkel een 2e afgeleide naar t op (n.l. de versnelling $\ddot{r}$), zoodat er enkel sinustermen optreden, en er aan de verschillende voorwaarden kan worden voldaan.

In dat geval varieeren alle grootheden, overal in de ster, in dezelfde phase, in tegenstelling met het strenge probleem, waarbij men zonder phaseverschillen niet aan alle voorwaarden kan voldoen.

Uit de adiabatische benadering is dus onmogelijk te verklaren, dat de grootste uitstraling samenvalt met de grootste expansiesnelheid. Volgens die benadering zou zij integendeel moeten samenvallen met het oogenblik van het kleinste volume. Nu heeft EDDINGTON aangetoond dat de trilling in het binnenste van de ster adiabatisch verloopt, *zoodat zijn hoofdconclusie, dat de uit de pulsatietheorie berekende periode met de waargenomene overeenstemt, voor niet onwaarschijnlijke waarden van de physische constanten, door de gemaakte verwaarloozing niet wordt beinvloed.* Immers de waarde van de periode wordt bijna uitsluitend bepaald door de omstandigheden in het binnenste van de ster. In de buitenste lagen van de ster geldt echter de adiabatische benadering niet, zoodat de mogelijkheid open blijft dat de temperatuurvariatie in die buitenste lagen een kwart periode vertraagd wordt. De waargenomen radieele snelheid is natuurlijk in phase gelijk met de kern, omdat reeds op geringe diepte onder de lagen die het lijnenspectrum bepalen, de adiabatische benadering geldt. Is er nu werkelijk in de buitenlagen een vertraging van de temperatuurvariatie van een kwart periode, dan is het samenvallen van hoogste temperatuur en grootste snelheid van nadering verklaard. Door het ontbreken van een mathematische theorie voor de buitenlagen, was het voor Eddington niet mogelijk, na te gaan of dit werkelijk het geval was. **Het doel van dit hoofdstuk is, te onderzoeken of de temperatuur in de buitenlagen werkelijk een kwart periode wordt vertraagd.**

Dat er in de buitenlagen eenig phaseverschil moet optreden tracht EDDINGTON op de volgende wijze, door een algemeene beschouwing aan te toonen:

Hij neemt aan dat in de buitenlagen van de ster „the temperature oscillations *are determined by the heat received and radiated, rather than by compression and rarefaction*", en vervolgt: „The heat flowing into this region is greatest at the time of compression; *if the temperature remained constant*, the heat leaving the surface would be greatest at the time of expansion (when the surface was greatest); from these two causes *the heat contained would be greatest a quarter period after compression*. This heat however causes a rise of temperature, so that the time of maximum radiation becomes earlier; this advance reacts on the time of maximum temperature, bringing it also earlier; and so on. Apparently the net result is that the time of maximum radiation is advanced to a quarter-period after compression, with the time of maximumtemperature about half-way between".

Vooreerst is het de vraag of in de buitenlagen de invloed van de compressie en expansie zoo gering is als Eddington aanneemt. Doch zelfs als dit zoo is, is het nog de vraag of het verkregen phaseverschil wel van eenige beteekenis is. Als de temperatuur constant bleef, dus als de lagen een oneindig groote warmtecapaciteit hadden, zou de maximale warmteinhoud een kwart periode na de compressie vallen. Hoe grooter de warmtecapaciteit, hoe grooter de phasevertraging is. **We kunnen ons afvragen of bij een redelijke waarde van de soortelijke warmte wel een phaseverschil van een kwart periode verkregen kan worden.**

EDDINGTON geeft dezelfde verklaring nog in een iets anderen vorm, daarbij meer speciaal de nadruk leggende op de vergrooting van het stralende oppervlak en het dunner worden der buitenlagen:

„If we consider spheres of radii ξ_1 and ξ_2 dilating with the material of the star, the effective opacity between them diminishes as the star expands, partly owing to the increase in radiating surface, and partly owing to the obstruction being thinned out to cover the larger surface. If the temperatures were unchanged, more heat would be let through. But the extra leakage of heat involves cooling, so that the excess flow of heat depends not on the actual opacity at the moment, but on the lag of temperature behind the opacity-change. This will be a maximum when the opacity is changing most rapidly. Consequently, the greatest flow of heat occurs when the opacity is diminishing most rapidly, i.e. when the velocity of expansion is greatest". Nieuwe gezichtspunten geeft deze redeneering niet.

Teneinde de kwestie zoo volledig mogelijk te onderzoeken, willen we het pulsatieprobleem, met inachtneming der straling oplossen voor een atmospheer volgens SCHWARZSCHILD. Duidelijkheidshalve plaatsen we nog eens bij elkaar alle vereenvoudigingen die we ons veroorloven:

1e We nemen aan een vlakke atmospheer. De versnelling der zwaartekracht g, wordt overal in die atmospheer gelijk aangenomen. Gedurende de pulsatie verandert echter g, wordt de atmospheer over een grooter oppervlak uitgespreid en kennen we haar in haar geheel een versnelling $\ddot{R}$ toe.

2e Er wordt alleen een energiestroom I_1 radieel naar buiten en een andere I_2 radieel naar binnen aangenomen.

3e De stralingsdruk wordt verwaarloosd.

4^e^ Productie van energie wordt in de evenwichtstoestand niet aangenomen.

5^e^ De absorptiecoefficient k wordt altijd en overal in die atmospheer constant aangenomen.

6^e^ Alleen infinitesimale zuiver harmonische pulsaties worden besproken.

De „energieproductie" in de hierboven bedoelde zin, zij per massa- en tijdseenheid ε. Is h de hoogte, gerekend vanaf een willekeurig nulvlak, dan is:

$$-\varepsilon\rho\, dh = \left(c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho}\right) \rho\, dh$$

$$\varepsilon = -c_v \dot{T} + \frac{HT}{\rho} \dot{\rho} \qquad (2)$$

Noem de constante van STEPHAN μ, dan worden de beide vergelijkingen *voor de straling*:

$$\frac{dI_1}{dh} = -I_1 k\rho + \tfrac{1}{2} \mu T^4 k\rho + \tfrac{1}{2} \varepsilon\rho \qquad (3)$$

$$\frac{dI_2}{dh} = +I_2 k\rho - \tfrac{1}{2} \mu T^4 k\rho - \tfrac{1}{2} \varepsilon\rho \qquad (4)$$

Voor de totale straling geldt $I_1 + I_2 = \mu T^4$; optellingen aftrekking van (3) en (4) geeft dus voor totale straling en voor de resulteerende buitenwaartsche energiestroom $S = I_1 - I_2$:

$$\frac{dS}{dh} = -c_v \dot{T}\rho + HT\dot{\rho} \qquad (5)$$

$$\frac{d}{dh}(\mu T^4) = -k\rho S \qquad (6)$$

Noem de optische diepte, op de gebruikelijke wijze gede-

finieerd $x - 1$, zoodat dus $dx = -k\rho dh$ *). Voer dit in in (5) en (6) en elimineer S uit die vergelijkingen:

$$\mu k \frac{d^2}{dx^2} T^4 = c_v \dot{T} - HT \frac{\dot{\rho}}{\rho} \qquad (7)$$

Ingevolge de gemaakte onderstellingen, kunnen we schrijven:

$$T = T_0 (1 + T_1) = T_0 (1 + T_s \sin nt + T_c \cos nt),$$

$$p = p_0 (1 + p_1) = p_0 (1 + p_s \sin nt + p_c \cos nt), \text{enz.} \qquad (8)$$

De frequentie n wordt bepaald door omstandigheden in het binnenste der ster en moet hier dus als gegeven worden beschouwd. Het nulpunt van de tijd kiezen we zoo, dat in het binnenste van de ster de cosinustermen nul zijn. Daardoor wordt b.v. $R_c = g_c = 0$.

Volgens de 5e onderstelling, kan de *continuiteitsvergelijking* geschreven worden in den vorm:

$$R^2 dx = R_0^2\, dx_0.$$

Daaruit volgt:

$$dx_0 = (1 + 2R_1)\, dx \qquad (9)$$

Vullen we de uitdrukkingen (8) en (9) in vergelijking (7) in, dan krijgen we:

$$\mu k \frac{d^2}{dx_0^2} . T_0^4 + 4\mu k R_1 \frac{d^2}{dx_0^2} T_0^4 + 4\mu k \frac{d^2}{dx_0^2} (T_0^4 T_1) =$$

$$= c_v T_0 \dot{T}_1 - HT_0 \dot{\rho}_1 \qquad (10)$$

De term die de tijd niet bevat moet = 0 gesteld worden. Dit geeft de vergelijking van SCHWARZSCHILD:

$$\frac{d^2}{dx_0^2} T_0^4 = 0, \qquad (11)$$

waaruit SCHWARZSCHILD afleidt:

$$T_0^4 = T_{g0}^4 x_0 \qquad (12)$$

---

*) De letter x heeft dus een andere beteekenis dan bij SCHWARZSCHILD.

Daarin is T_{go} de temperatuur aan de grens van de ster in de evenwichtstoestand. Vgl. (11) drukt uit dat er in de evenwichtstoestand geen energieproductie wordt aangenomen.

Met toepassing van (11) en (12) geven de overige termen van (10):

$$4\mu k\, T_{go}^4 \frac{d^2}{dx_0^2}(T_1 x_0) = c_v T_0 \dot{T}_1 - HT_0 \dot{\rho}_1. \qquad (13)$$

Uit de toestandsvergelijking volgt: $\rho_1 = p_1 - T_1$ en dus $\dot{\rho}_1 = \dot{p}_1 - \dot{T}_1$. Dit passen we toe; we schrijven $H = c_p - c_v$ en stellen in (13) de sinus- en cosinustermen in linker- en rechterlid afzonderlijk aan elkaar gelijk. Zoo ontstaan de vergelijkingen:

$$\frac{d^2}{dx_0^2}(T_s x_0) = -a x_0^{1/4}\left(T_c - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot p_c\right), \qquad (14)$$

$$\frac{d^2}{dx_0^2}(T_c x_0) = -a x_0^{1/4}\left(T_s - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot p_s\right). \qquad (15)$$

Daarin is $a = c_p\, n/4\mu k\, T_{go}^3$ en $\gamma = c_p/c_v$.

De *dynamische voorwaarde* luidt:

$$\frac{dp}{dh} = -g\rho - \rho\ddot{R}.$$

Daar volgens (9), $\rho_0 dh_0 = \rho dh\,(1 + 2R_1)$, kunnen we hiervoor schrijven:

$$(1 + 2R_1)\frac{dp}{\rho_0\, dh_0} = -g - \ddot{R}.$$

De termen die de tijd niet bevatten geven de statische voorwaarde:

$$dp_0 = g_0 - \rho_0\, dh_0,$$

de overige:

$$-g_0 \frac{d\,(p_0 p_1)}{dp_0} = -g_0 g_1 + n^2 R_0 R_1 + 2 g_0 R_1$$

Nu is $g_1 = -2R_1$, dus

$$d\,(p_0 p_1) = -R_1\left(4 + \frac{n^2 R_0}{g_0}\right) dp_0.$$

Aan de grens is $p_0 = p_0 p_1 = 0$, dus na integratie krijgt men:

$$p_1 = -R_1\left(4 + \frac{n^2 R_0}{g_0}\right). \qquad (16)$$

Deze vergelijking komt bij EDDINGTON voor als grensvoorwaarde; zij zou kunnen dienen om de waarde van n te bepalen.

Vergelijking (16) is te splitsen in:

$$p_s = -R_s\left(4 + \frac{n^2 R_0}{g_0}\right) \quad ; \quad p_c = 0. \qquad (17)\ (18)$$

De term $(\gamma - 1)\, p_s/\gamma$ in (15) heeft een eenvoudige beteekenis. Het is n.l. de, overal in de atmospheer gelijke waarde, die T_s zou hebben, indien de trillingen adiabatisch verliepen. Stel dus in overeenstemming met (17):

$$T_s\,(ad) = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\, p_s = -\frac{\gamma - 1}{\gamma}\left(4 + \frac{n^2 R_0}{g_0}\right) R_s.$$

Volgens (18) is $p_c = 0$. Stelt men nu nog:

$$\{T_s - T_s\,(ad)\}\, x_0 = y \quad ; \quad T_c x_0 = z,$$

dan worden de vergelijkingen (15) en (16):

$$\frac{d^2 y}{dx_0^2} = -a z x_0^{-3/4} \quad ; \quad \frac{d^2 z}{dx_0^2} = + a y x_0^{-3/4} \qquad (19)\ (20)$$

y/x_0 en z/x_0 geven een maat voor de afwijkingen van een adiabatisch proces.

De vier integratieconstanten van het stelsel (19) (20) worden bepaald door 2 *grenscondities* voor groote waarde van x_0 en 2 voor de grens van de ster. Voor groote x_0 moet gelden:

$$T_s = T_s\,(ad) \quad ; \quad T_c = 0. \qquad (21)\ (22)$$

Aan de grens, dus voor $x = 1$ moet steeds de binnenwaartsche energiestroom $I_2 = 0$ zijn, dus moet daar de totale straling μT^4 gelijk zijn aan de resulteerende buitenwaartsche energiestroom S. In verband met (6) wordt dus de grensconditie voor $x = 1$:

$$\mu T^4 = \frac{d}{dx}(\mu T^4).$$

Past men (9) en (12) toe en laat men de termen weg die de tijd niet bevatten, dan vindt men na eenige herleiding:

$$R_1 + 2\frac{dT_1}{dx_0} = 0,$$

of na splitsing:

$$\frac{dT_s}{dx_0} = -\tfrac{1}{2} R_s; \quad \frac{dT_c}{dx_0} = 0. \qquad (23)\ (24)$$

Door deze laatste voorwaarden wordt blijkbaar rekening gehouden met de oorzaak van vergrooting van het temperatuurverval, bij de grootste expansie, die gelegen is in het dunner worden der buitenlagen, wanneer ze over een grooter oppervlak worden uitgespreid.

We willen nu een *schatting* maken *van de grootteorde van de constante* a die in de vergelijkingen (14) en (15) voorkomt. We gebruiken absolute eenheden. Stel het moleculairgewicht 2, dan is $H = 4{,}15 \times 10^7$ gr. sec.$^{-2}$. Stel verder $\gamma = 5/3$, dan is $c_p = 2H/3$; $\mu = 10{,}6 \times 10^{-5}$ gr. sec.$^{-3}$; $T_{go} = 6000°$. De periode P nemen we gelijk aan die van δ Cephei, 5,4 dagen $= 4{,}7 \times 10^5$ sec.; dan is $n = 2\pi/P = 1{,}3 \times 10^{-5}$ sec.$^{-1}$; k is grooter, althans niet veel kleiner dan 1. In die onderstellingen wordt a van de orde van 10^{-5}.

Schrijven we a in de vorm:

$$a = \frac{\pi\, c_p\, T_{go}}{2k\mu\, T_{go}^4 P},$$

dan zien we dat a van de orde is van de warmteinhoud van een elementje aan de grens van de ster, gedeeld door de straling van dat elementje in een periode. *Dat a klein is beteekent, dat ieder element, per periode, veel meer energie moet absorbeeren en weer uitstralen, dan het in de vorm van warmte kan bevatten. Dit doet reeds vermoeden dat de door Eddington bedoelde phasevertraging niet zeer aanzienlijk zal zijn.*

Stel, om de vergelijkingen (19) en (20) te integreeren:

$$y + iz = u \quad ; \quad y - iz = v$$

Vermenigvuldig (20) met i, tel daarna de beide vergelijkingen op en trek ze van elkaar af:

$$\frac{d^2u}{dx_0^2} = iau\, x_0^{-3/4} \quad ; \quad \frac{d^2v}{dx_0^2} = -iav x_0^{-3/4}.$$

De algemeene oplossing *) is dan:

$$u = x_0^{1/2}\left\{A I_{+4/5}\left(\tfrac{8}{5}\sqrt{-ai}\, x_0^{5/8}\right) + B I_{-4/5}\left(\tfrac{8}{5}\sqrt{-ai}\, x_0^{5/8}\right)\right\} \quad (25)$$

$$v = x_0^{1/2}\left\{A' I_{+4/5}\left(\tfrac{8}{5}\sqrt{+ai}\, x_0^{5/8}\right) + B' I_{-4/5}\left(\tfrac{8}{5}\sqrt{+ai}\, x_0^{5/8}\right)\right\} \quad (26)$$

A, B, A′ en B′ zijn (complexe) integratieconstanten. De Besselsche functies zijn te ontwikkelen in convergente reeksen, die voor kleine waarden van het argument zeer snel convergeeren:

$$I_n(\xi) = \text{constante} \times \xi^n \left\{1 - \frac{\xi^2}{4(n+1)} + \frac{\xi^4}{32(n+1)(n+2)} \cdots \right\}$$

In ons geval bevat iedere volgende term een factor a meer dan de vorige, zoodat wanneer $x_0 \ll 10^4$, met de eerste term van iedere Besselsche functie kan worden volstaan. Daaruit volgt dat de algemeene vorm voor y en z een lineaire uitdrukking is in x_0.

Dit komt daarop neer dat het rechterlid van de vergelijkingen (19) en (20), dat juist dient om rekening te houden met de

*) PROF. DR. H. DE VRIES, Differentiaal en Integraalrekening III, 182.

straling, volstrekt geen invloed heeft op het resultaat. Dus *de door Eddington aangegeven vermoedelijke oorzaak van een phaseverschil heeft slechts onbeduidende invloed.*

De algemeene oplossing van (14) en (15) blijkt dus te zijn:

$$T_s = p + \frac{q}{x_0} \quad ; \quad T_c = r + \frac{s}{x_0} \qquad (27)\ (28)$$

De integratieconstanten p, q, r en s, moeten bepaald worden uit de grensvoorwaarden (21), (22), (23) en (24). Men vindt:

$$p = T_s\,(ad) \quad ; \quad q = -\tfrac{1}{2}R_s \quad ; \quad r = 0 \quad ; \quad s = 0.$$

In de buitenste lagen van de ster treedt dus wel een afwijking op van een adiabatisch proces, doch geen phaseverschil tusschen T en R, en dus evenmin een phaseverschil tusschen een der overige grootheden en R.

Omdat men zou kunnen betwijfelen of op een optische diepte 10^4 reeds de adiabatische benadering geldt, willen we nagaan welke vorm T_s en T_c op groote diepte aannemen, volgens de formules (25) en (26). Voor groote waarden van het argument is een Besselsche functie te ontwikkelen in een semi-convergente reeks. Doet men dit, dan blijkt dat T_s en T_c het karakter krijgen van periodieke functies van $x_0^{5/8}$, met een periode van ongeveer 6000, en nog vermenigvuldigd met een coefficient die exponentieel met $x_0^{5/8}$ toeneemt.

Dus niet alleen is er in de buitenste lagen geen oorzaak te vinden voor een phasevertraging, doch *er bestaat ook geen mogelijkheid, dat een kleine afwijking van een adiabatisch proces in de diepere lagen, naar buiten steeds toeneemt en juist de kwart phasevertraging veroorzaakt.*

EDDINGTON's onderstelling, dat er in de buitenlagen geen belangrijke hoeveelheid energie door de pulsatie wordt geproduceerd is onjuist. Dit blijkt b.v. duidelijk uit (17) [46]. Toch

willen we nagaan hoe onze uitkomsten zich wijzigen wanneer we deze onderstelling invoeren. Daartoe hebben we in al onze vergelijkingen de $\dot{p}$ en dus de T_s (ad) nul te stellen. Daar (17) een direkt gevolg is van de dynamische voorwaarde, moeten we er van afzien daaraan te voldoen, m. a. w. we moeten in de atmospheer bepaalde uitwendige krachten onderstellen. We krijgen dan inplaats van (14) en (15):

$$\frac{d^2}{dx_0^2}(T_s\, x_0) = -\,a\, x_0^{1/4}\, T_c \quad ; \quad \frac{d^2}{dx_0^2}(T_c x_0) = +\,a\, x_0^{1/4}\, T_s.$$

De algemeene oplossing heeft in de buitenste lagen weer de vorm (27) (28) en in de diepere lagen hetzelfde karakter als de hierboven behandelde juiste oplossing. Derhalve kan men, ook met deze foutieve onderstelling, het bedoelde phaseverschil niet verklaren.

In EDDINGTON's beschouwing is sprake van de vergrooting van het stralende oppervlak en het dunner worden der buitenlagen door de expansie, terwijl toch in onze vgl. (14) en (15) de R_1 niet optreedt. De reden is, dat R_1 in (10) alleen voorkomt, vermenigvuldigd met $d^2T_0^4/dx_0^2$, dus met de energieproductie in de evenwichtstoestand. Daar we deze verwaarloosd hebben *) komt R_1 niet voor in de termen van de 1e orde. Inderdaad is het door EDDINGTON bedoelde effect, de invloed van de verandering van de doorschijnendheid (welke verandering van de 1e orde is), op de energieproductie door de pulsatie (eveneens van de 1e orde) een effect van de 2e orde.

M. i. zou het zeer de moeite loonen, de termen van de 2e orde vanuit dit gezichtspunt nader te beschouwen. Er is n.l. verband tusschen de asymmetrie der lichtkromme en het ge-

*) Het geoorloofde van deze verwaarloozing kan worden aangetoond.

zochte phaseverschil. De regel is immers niet dat de grootste contractie en de grootste uitstraling juist een kwart periode verschillen, doch dat de grootste uitstraling precies samenvalt met de grootste snelheid van expansie, ook bij de meest asymmetrische lichtkrommen. Misschien wijst dit er op dat de verklaring te zoeken is in de termen van de 2e orde. Dan echter zou onze berekening met des te grooter nauwkeurigheid van toepassing zijn, naarmate de amplitude kleiner is.

Conclusies:

1°. Het is ongeoorloofd in de buitenste lagen van een ster de temperatuurveranderingen, die ontstaan door contractie en expansie, te verwaarloozen t. o. v. die welke ontstaan door straling.

2°. Bij pulsaties met kleine amplitude varieeren alle grootheden in de geheele ster in dezelfde phase.

3°. Aan de oppervlakte bestaan afwijkingen van een adiabatische pulsatie, doch niet in die zin dat een phaseverschil optreedt.

Dus:

De pulsatietheorie, in de door Eddington gegeven vorm, kan geen verklaring geven van het samenvallen van de grootste uitstraling met de grootste snelheid van nadering.

LITERATUUR

1. Ottawa **9**, 5, 1925.
2. Spec. Vatic. **6**, 1923.
3. A. N. **222**, 234, 1924.
4. Publ. Kuffnerschen Sternwarte, Wien—Ottakring, **5**, 1900.
5. Ann. Univ. de Lyon, **1** Fasc. 33, 1912.
6. H. A. **46**, 1904.
7. A. N. **168**, 35, 1905.
8. Aph. Jrn. **27**, 188, 1908.
9. Aph. Jrn. **50**, 200, 1919.
10. A. N. **154**, 336, 1901.
11. A. N. **175**, 1, 1907.
12. Ottawa **9**, 5, 1925.
13. A. N. **208**, 169, 1918.
14. A. N. Jubileum-nummer 1921.
15. A. N. **210**, 345, 1920.
16. Bull. Astr. **26**, 1, 1909.
17. C. R. **146**, 520, 1908.
18. Publ. Potsdam. **24**, nr. 76, 1920.
19. Zie G. SCHNAUDER A. N. **219**, 221, 1923.
20. A. N. **226**, 3, 1925.
21. M. N. **85**, 212, 1925.
22. Zie over deze kwestie: A. BRILL A. .N **225**, 161, 1925.
23. Lund Medd. **2**, 24, 1920.
24. Zie b.v. F. HENNING Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik 1919, Heft 1. Dezelfde kromme werd gebruikt door A. BRILL in Berl. Bab. **5**, Heft, 1.
25. Zie MÜLLER en KEMPFF, Publ. Potsdam **12**, inleiding.
26. De waarden van Leiden Ann. **34** en van B.A.N. 35 zijn gemiddeld met de aldaar aangegeven gewichten.
27. A. N. **217**, 17, 1922.