UNIVERSITY OF AMSTERDAM

UvA-DARE (Digital Academic Repository)

Proefschrift Christian Bokhove [Bespreking van: C. Bokhove (2011) Use of ICT for acquiring, practicing and assessing algebraic expertise]

Heck, A.

Publication date
2013
Document Version
Final published version
Published in
Tijdschrift voor Didactiek der ß-wetenschappen

Link to publication

Citation for published version (APA):
Heck, A. (2013). Proefschrift Christian Bokhove [Bespreking van: C. Bokhove (2011) Use of ICT for acquiring, practicing and assessing algebraic expertise]. *Tijdschrift voor Didactiek der ß-wetenschappen*, *30*(1&2), 49-55. http://www.fisme.uu.nl/tdb/article.php?record=559

General rights
It is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), other than for strictly personal, individual use, unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

Disclaimer/Complaints regulations
If you believe that digital publication of certain material infringes any of your rights or (privacy) interests, please let the Library know, stating your reasons. In case of a legitimate complaint, the Library will make the material inaccessible and/or remove it from the website. Please Ask the Library: https://uba.uva.nl/en/contact, or a letter to: Library of the University of Amsterdam, Secretariat, P.O. Box 19185, 1000 GD Amsterdam, The Netherlands. You will be contacted as soon as possible.

UvA-DARE is a service provided by the library of the University of Amsterdam (https://dare.uva.nl)

Download date:15 Oct 2026

Proefschrift Christian Bokhove

Use of ICT for Acquiring, Practicing and Assessing Algebraic Expertise

Bespreking door:
André Heck
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, Universiteit van Amsterdam

Op 12 december 2011 promoveerde Christian Bokhove aan de Universiteit Utrecht als eerste onderzoeker uit het DUDOC programma (zie www.dudocprogramma.nl). Dat het hem lukte om dit binnen vier jaar klaar te spelen in combinatie met zijn werk als vo-docent en gemeenteraadslid is alleen al een complement waard. Ongetwijfeld heeft het geholpen dat hij een vliegende start kon maken, omdat hij al goed in het onderwerp ingevoerd was via diverse projecten en omdat het proefschrift opgebouwd is uit een reeks artikelen die planmatig tot stand konden komen in de verschillende fasen van het onderzoek. De titel geeft aan dat het gebruik van ICT-ondersteund verwerven, oefenen en toetsen van algebraïsche expertise centraal heeft gestaan. Over het niveau van algebraïsche bekwaamheden aan het einde van het voortgezet onderwijs wordt de laatste jaren veel gediscussieerd, en niet alleen in Nederland. Ontwikkelingen in het gebruik van technologie bij wiskundeonderwijs roepen de vraag op hoe ICT heden ten dage een positieve rol kan spelen bij het leren, oefenen en toetsen van algebraïsche kennis en vaardigheden, en welke factoren daarbij van belang zijn. Dit maakt het onderwerp van deze studie relevant voor wetenschappelijk onderzoek naar vernieuwingen in het wiskundevak en voor de schoolpraktijk.

De centrale onderzoeksvraag is: op welke wijze kan ICT worden gebruikt voor het verwerven, oefenen en toetsen van algebraïsche expertise. Het is dus niet de vraag óf ICT gebruikt kan worden in algebraonderwijs, maar hóe. Deze algemene vraag is onderverdeeld in deelvragen die verbonden zijn met opeenvolgende fasen in het onderzoek en die beantwoord worden in afzonderlijke hoofdstukken. Deze hoofdstukken zijn voor het merendeel bijna letterlijke reproducties van (inmiddels) verschenen publicaties. De onderzoeksmethode is gebaseerd op principes van design research (Van den Akker et al., 2006). Er worden drie cycli in het onderzoek met toenemende schaalgrootte en veranderend karakter van de interventie beschreven: de eerste twee onderzoekscycli waren kleinschalig en hierin werden kwalitatieve onderzoeksmethoden toegepast, de derde fase was grootschaliger en hierin werden kwantitatieve onderzoeksmethoden benut. De iteratieve opzet van het ontwerpen van een digitale lesmodule en het testen in de klassenpraktijk

zijn sterke kanten van het gepresenteerde werk. Maar er zijn wel kanttekeningen te plaatsen bij het onderzoek. Ik loop de verschillende hoofdstukken kritisch langs.

In hoofdstuk 2 wordt beschreven hoe de Delphi-methode gehanteerd is om een evaluatie-instrument te maken voor het beoordelen van software tools voor het verwerven, oefenen en toetsen van algebraïsche vaardigheden, en hoe dit instrument gebruikt is om een digitale tool voor het vervolg van het promotieonderzoek te selecteren. Uiteindelijk is de keuze gevallen op de aan het Freudenthal Instituut ontwikkelde Digitale Wiskunde Omgeving (DWO).

Belangrijk in deze aanpak is een zorgvuldige keuze van het panel van experts en een heldere opdracht tot validatie van een instrument. Gewoonlijk blijven de panelleden tijdens en na de studie anoniem, opdat zij zonder terughoudendheid hun mening kunnen ventileren en elkaar niet kunnen beïnvloeden. Omdat de anonimiteit van de panelleden niet gehandhaafd is (dankzij de onderzoekslogs op de FI-thuispagina van Bokhove) kan een gedetailleerd beeld gevormd worden van de samenstelling van het panel en is ook te achterhalen welke expert betrokken was bij de bepaling van de validiteit van de scoring. De ontstane indruk is dat de samenstelling gekleurd is door bestaande contacten van het onderzoeksteam.

Ook hangt het resultaat van de validatie van de criteria af van wat er precies aan de experts gevraagd is. Ik citeer uit de e-mail met het verzoek tot deelname aan het panel: “A first research goal is to establish a list of criteria for ICT tools for algebra assessment… In order to check the external validity of the set of criteria constructed, I would like to ask you to express your opinion on this list and on the relevance of each of the criteria defined.” Volgens dit bericht gaat het om het opstellen van criteria voor ICT tools om algebraïsche vaardigheden te toetsen. Dit is een beperkter doel dan in het hoofdstuk beschreven wordt, namelijk “the development of an instrument for the evaluation of digital tools for algebra education.” Volgens dit citaat gaat het om digitale tools voor algebraonderwijs. Maar of het alle geraadpleegde experts ook even duidelijk is geweest dat de criteria niet alleen digitale toetsing van algebraïsche vaardigheden betroffen blijft de vraag.

Evenwel, van grotere invloed op het eindresultaat is geweest de keuze van het raamwerk om tot de initiële lijst van criteria te komen. Dit wordt niet verbloemd in het hoofdstuk. Zo lijkt van meet af aan vast te hebben gestaan dat de digitale tool leerlingen in staat zou moeten stellen om algebrataken stapsgewijs aan te pakken en hierbij leerlingen in elke stap van digitale feedback zou moeten kunnen voorzien. Ik kan me niet aan de indruk onttrekken dat hiermee de DWO als vanzelf een streepje voor had in de selectieprocedure. Voor het vervolg van het onderzoek is het niet zo erg, want een gemotiveerde keuze voor de DWO zou wat mij betreft volstaan hebben.

In de hoofdstukken 3 en 4 beschrijft Bokhove hoe hij, via één-op-één hardop-denksessies met enkele vwo-6 leerlingen die prototypische DWO-activiteiten uitvoerden, onderzocht heeft hoe de interactie tussen leerlingen en de ICT-omgeving verloopt bij het leren van algebra en welke feedback hen zou kunnen helpen tijdens het leerproces. De titel van

het derde hoofdstuk geeft aan dat het 'symbol sense' gedrag van leerlingen tijdens digitale activiteiten centraal staat.

Het begrip symbol sense is geïntroduceerd door Arcavi (1994), niet via een strenge definitie maar slechts in termen van eigenschappen. Dit leidt tot tamelijk vage aanduidingen zoals "gevoel hebben voor symbolen en hun verschillende rollen in verschillende contexten." Drijvers en Kop (2012, p. 65) beschrijven symbol sense als "de algebraïsche expertise of 'algebraïsche geletterdheid' die, veelal op de achtergrond zonder dat we ons daarvan bewust zijn, de uitvoering van de basisroutines stuurt en het inzicht in onderliggende concepten omvat." Maar wat deze algebraïsche expertise nu precies inhoudt is niet zo gemakkelijk op te schrijven. De herhaalde verwijzing in de inleidingen van hoofdstukken naar de 'math wars' over procedurele vaardigheden versus conceptueel begrip verheldert niet op dit punt en draagt mijns inziens nergens aan bij. Drijvers (2012, p. 41) schrijft: "Het idee van symbol sense is eigenlijk betrekkelijk eenvoudig: algebra is meer dan het uitvoeren van basisprocedures. Symbol sense is een begrip dat kan helpen om de vinger achter dat 'meer' te krijgen." Maar menig onderzoeker doet dat op zijn of haar manier: Novotná en Hoch (2008) en Van Stiphout (2011) hebben bijvoorbeeld verschillende opvattingen over wat symbol sense inhoudt. Belangrijker is evenwel wat Bokhove nu eigenlijk bedoelt met 'algebra met inzicht'. En waaruit moge dit inzicht blijken? Bedoelt hij hetzelfde met de term algebraïsche expertise? Een operationele definitie van algebraïsche expertise in het proefschrift zou veel duidelijkheid geschapen hebben en ook geholpen hebben om een beter beeld te krijgen van hoe algebraïsche expertise verworven kan worden en hoe dit bij personen te herkennen.

Als we ons evenwel beperken tot die aspecten van algebraïsche expertise waarop Bokhove inzoomt, dan wordt een en ander duidelijker. Veel waarde wordt gehecht aan de volgende twee karakteristieken van flexibel algebraïsch manipuleren: (1) de 'Gestalt view' op formules: de bekwaamheid om een formule in zijn geheel te doorzien, globale eigenschappen te herkennen en te voorzien wat de effecten van een gekozen manipulatiestrategie zijn; en (2) 'visual salience': het omgaan met opvallende aandachttrekkende elementen in formules, zoals wortels en kwadraten. Bokhove heeft de laatste karakteristiek uitgebreid met de notie van 'pattern salience': een (deel)expressie die als het ware 'schreeuwt' om actie. Denk hierbij aan een uitdrukking met haakjes die uitnodigt tot uitwerking. Aandachttrekkers in algebraïsche formules brengen een probleemoplosser de ene keer op goede ideeën om verder te gaan, maar de andere keer verleiden ze juist tot incorrecte of weinig effectieve manipulaties. Algebraïsche expertise openbaart zich op dit punt doordat de probleemoplosser zich van dergelijke mogelijkheden en gevaren bewust is en steeds oplettend bezig is. Bokhove probeert in zijn onderzoek in eerste instantie te achterhalen of Gestalt view en visual salience net zo'n rol spelen bij het uitvoeren van algebrataken in een digitale werkomgeving als bij pen-en-papier opdrachten. Mij is niet duidelijk waarom hieraan getwijfeld wordt, omdat juist een van de criteria bij de digitale toolkeuze was dat het werken met de computer moest kunnen lijken op het rekenen met

pen en papier. Maar het kan natuurlijk geen kwaad dit in de praktijk te beproeven, want wellicht zijn er toch beperkingen in de digitale tool die een negatieve rol spelen of nodigt de feedback van de tool in de digitale activiteiten leerlingen juist uit tot een meer onderzoekend en volhardend gedrag om een taak tot een goed einde te brengen.

De taken die Bokhove in het in hoofdstuk 3 beschreven deelonderzoek en ook in latere ontwerp- en onderzoekscycli gebruikt voor het toetsen van algebraïsche expertise zijn als volgt gecategoriseerd: (1) vergelijkingen met gemeenschappelijke factoren oplossen; (2) deelexpressies als algebraïsche entiteiten gebruiken; (3) weerstaan van onnodig uitwerken van haakjes; en (4) herkennen van verborgen factoren. Uit de één-op-één hardopdenksessies met individuele leerlingen die taken uit genoemde categorieën uitvoerden is gebleken dat inderdaad Gestalt view en visual salience net zo'n rol spelen bij digitaal werk als bij uitvoering van taken met pen en papier. Ook suggereren de resultaten van dit verkennende deelonderzoek dat bij de ontwikkeling van een digitale lesmodule voor het verwerven, oefenen en toetsen van algebraïsche expertise goed nagedacht moet worden over een geschikte volgorde en ondersteuning van algebrataken, en over de inzet van digitale feedback als middel om leerlingen te laten oefenen in het verwerven van Gestalt view en het omgaan met visual salience.

Met andere woorden, het raamwerk voor de ontwikkeling van een digitale lesmodule en de punten waarop gelet wordt bij het uitproberen van het lesmateriaal in de klassenpraktijk heeft hiermee vorm gekregen. Maar of dit raamwerk het enige of beste kader is blijft de vraag vanwege de onduidelijkheid over wat onder algebraïsche expertise en het verwerven hiervan verstaan wordt. De schat aan onderzoeksliteratuur over wat expertise is en hoe nieuwelingen problemen anders dan experts aanpakken wordt in het geheel niet aangeroerd in het proefschrift. Hoe kunnen we zo weten of leerlingen algebraïsche expertise verworven hebben of slechts (kortstondig) handig hebben leren manipuleren met een beperkt aantal categorieën van algebraïsche formules?

In het vierde hoofdstuk rapporteert Bokhove over hoe initiële feedback ontworpen en ingebouwd is in de DWO en in de algebrataken. Jammer genoeg blijft het in dit hoofdstuk slechts bij één uitgewerkt voorbeeld van de methode van feedbackverbetering, namelijk voor de taak van het oplossen van vergelijkingen met gemeenschappelijke factoren. Voor feedback design bij de andere categorieën van algebrataken was vast geen plaats vanwege de eisen die tijdschriften aan de omvang van artikelen stellen. Dit wordt voor een deel gecompenseerd doordat Bokhove in het vijfde hoofdstuk meer ingaat op de gehanteerde principes voor het ontwerp van feedback. Maar ik schrijf met opzet "voor een deel", omdat het toelichtende voorbeeld ook dan weer over het oplossen van vergelijkingen met gemeenschappelijke factoren gaat.

Het vijfde hoofdstuk behandelt de als belangrijk geïdentificeerde ontwerpprincipes voor feedback. Het eerste ontwerpprincipe is dat leerlingen in het begin van de module nog aan de hand genomen worden en gaandeweg meer op eigen benen leren te staan. In het begin van de module is er nog veel feedback, ook op tussenstappen, en zijn er uit-

gewerkte voorbeelden in de vorm van korte uitlegfilmpjes. Bokhove kiest hierna, onder verwijzing naar principes uit de cognitieve belastingstheorie, voor een geleidelijke afbouw van feedback om zo een meer optimaal traject te realiseren dat rekening houdt met toenemende bekwaamheden van leerlingen.

Wat volgens Bokhove ook goed werkt om algebraïsche expertise te verwerven is het doelbewuste creëren van crisissituaties in de lesmodule, bijvoorbeeld in de vorm van moeilijke en ongewone opgaven die een leerling niet op basis van routine kan oplossen, maar alleen succesvol kan aanpakken als hij of zij de algebraïsche structuur van expressies in de opdrachten echt door heeft. De onderliggende gedachte is dat het echte leren van een leerling juist begint op het moment dat zekerheden ter discussie komen te staan en nieuwe inzichten of vaardigheden verworven moeten worden. Om dit leermoment niet te laten eindigen in een gevoel van onmacht bij de leerling wordt meteen na een crisis allerlei feedback aangeboden in de vorm van uitlegfilmpjes, uitgewerkte voorbeelden en hints. Deze variatie in type feedback is het derde ontwerpprincipe. Keuzes worden hierbij gebaseerd op feedbackonderzoek van Hattie en Timperley (2007).

Bokhove beschrijft hoe hij intelligente feedback ontworpen en ingebouwd heeft in de DWO en in een digitale lesmodule van 4 tot 6 klokuren. In de interventie in een vwo-6 klas zijn twee feedbackcondities experimenteel onderzocht. Resultaten uit de klassenpraktijk wijzen er op dat leerlingen het meest baat hebben bij een combinatie van intelligente taakgerelateerde feedback op alle tussenstappen van de oplossing en zelfregulerende feedback in de vorm van extra knoppen voor hints, volgende stappen en uitgewerkte oplossingen. Of het gebruik van crisis-items een gunstig effect heeft op het verwerven van algebraïsche expertise is volgens Bokhove minder evident: leerlingen gaan na crisis-items niet meer opgaven goed maken, maar hebben er in ieder geval wel minder pogingen in de digitale leeromgeving voor nodig. De eerlijkheid gebiedt bij deze bevindingen op te merken dat dit onderzoek een verkennend karakter heeft. Persoonlijk vind ik dit hoofdstuk overigens wel het meest interessante van het hele proefschrift, omdat hier de centrale onderzoeksvraag echt aan de orde is en ook het theoretische en praktische belang van design research samenkomen.

Soms wordt als nadeel van design research geopperd dat ontwerper, onderzoeker en docent dezelfde persoon zijn en dat het gebruik van ontworpen lesmateriaal mede hierdoor in de 'eigen' onderwijspraktijk onderzocht wordt, met als gevolg dat men vaak blijft zitten met de vraag of het op grotere schaal ook net zo uitpakt. Het is dus prijzenswaardig dat Bokhove de moeite genomen heeft om het materiaal aan te passen zodat het op meerdere scholen en met meerdere leraren beproefd kon worden in de klassenpraktijk. In het zesde hoofdstuk staan de resultaten van interventies op negen scholen, waarbij leraren de vrijheid hadden om het lesmateriaal in te zetten op de manier die hen het beste of haalbaar leek. Via een multilevel analyse van de kwantitatieve data van een voor- en na-test zijn factoren geïdentificeerd die wel en geen rol speelden bij het verwerven van algebraïsche expertise met behulp van de online leeromgeving.

Toch moeten er nog de nodige slagen om de arm gehouden worden ten aanzien van de resultaten: Bokhove wijst zelf al op het kleine aantal participanten voor multilevel analyse en het gevaar statistische bevindingen al te gemakkelijk te koppelen aan causale conclusies. Een studie op nog grotere schaal wordt aanbevolen. Ik vraag me af of resultaten van een na-test kort na de bestudering van het lesmateriaal wel een goede maat zijn voor de verworven expertise: wordt dan niet louter en alleen een korte-termijn leeropbrengst getoetst? Waarom geen retentietest gedaan om te onderzoeken wat er aan algebraïsch inzicht en algebraïsche vaardigheden daadwerkelijk beklijft? Misschien is de tijd voor onderzoek wel te kort om dit van iemand die binnen vier jaar wil en moet promoveren te verlangen, maar kan dit in vervolgonderzoek wel een plaats krijgen. Ook lees ik weinig over wat de betrokken leraren met hun leerlingen daadwerkelijk gedaan hebben en wat hun ervaringen met en commentaren op het online leren van algebra zijn. Hier wringt waarschijnlijk weer het gegeven dat het proefschrift gebaseerd is op artikelen en dat de ruimte in een artikel beperkt is.

Conclusie

Wat is het belangrijkste dat dit onderzoek heeft opgeleverd? Het meest interessant in het ontworpen en in de klassenpraktijk beproefde onderwijs vind ik het idee van het doelbewuste gebruik van crisissituaties en de diverse vormen van digitale hulp om leerlingen te ondersteunen in het overwinnen van hun moeilijkheden. Ik kan Bokhove volgen in zijn conclusie dat deze studie laat zien dat een raamwerk dat gebaseerd is op toetsgestuurd leren met feedback als leidend principe succesvol kan zijn voor het ontwerp van een digitale lesmodule voor het leren van algebra. Het kan een nuttige aanvulling zijn op het repertoire van mogelijkheden dat een docent ter beschikking heeft om leerlingen te helpen bij het leren en oefenen van wiskunde. Een tweede opbrengst van deze studie is natuurlijk de verbetering en uitbreiding van de DWO.

Maar eigenlijk had ik toch op meer gehoopt. Een operationalisering van het begrip algebraïsche expertise is bijvoorbeeld naar mijn mening niet goed uit de verf gekomen of op zijn best alleen voor een beperkte categorie van algebrataken op 6-vwo niveau. Maar deze taken kunnen de indruk wekken van gekunstelde sommen waarin leerlingen enkel handig moeten (leren) manipuleren met algebraïsche uitdrukkingen. De problemen met algebraïsche bekwaamheden van leerlingen vinden hun oorsprong in eerdere fasen van wiskundeonderwijs, te beginnen in de onderbouw. Als het verwerven van algebraïsch inzicht en vaardigheid centraal staat, waarom is het onderzoek dan niet gericht op de fase(n) waarin de fundamenten voor algebraïsche expertise gelegd worden? Daar wordt de DWO toch ook volop ingezet bij het leren van wiskunde? Dit zou de resultaten nog relevanter voor de schoolpraktijk en vervolgopleidingen maken en meer inzicht geven in de mogelijke bijdrage van ICT aan het verwerven van algebraïsche bekwaamheden op goed niveau. Bokhove heeft een begin gemaakt dat personen die al goede mogelijkheden voor

ICT bij algebraonderwijs zien in hun mening sterkt. Maar ik betwijfel of hij sceptici met zijn onderzoek en proefschrift heeft kunnen overtuigen.

Literatuur

Arcavi, A. (1994). Symbol sense, informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(3), 24-35.

Drijvers, P. (2012). Wat bedoelen ze toch met… symbol sense? *Nieuwe Wiskrant*, *31*(3), 39-42.

Drijvers, P., & Kop, P. (2012). Variabelen en vergelijkingen. In: P. Drijvers, A. van Streun, & B. Zwaneveld (Red.), *Handboek wiskundedidactiek* (pp. 53-81). Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, *77*(1), 81-112.

Novotná, J., & Hoch, M. (2008). How structure sense for algebra expressions or equations is related to structure sense for abstract algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(2), 93-104.

Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S., & Nieveen, N. (2006). *Educational Design Research*. New York: Routledge.

Van Stiphout, I. (2011). *The Development of Algebraic Proficiency*. Proefschrift, Technische Universiteit Eindhoven. Online beschikbaar (15 januari 2013): http://alexandria.tue.nl/extra2/719774.pdf