



## UvA-DARE (Digital Academic Repository)

### Niveauperhoging door samenwerkend leren

Dekker, R.; Elshout-Mohr, M.

**Publication date**

2007

**Document Version**

Final published version

[Link to publication](#)

**Citation for published version (APA):**

Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (2007). *Niveauperhoging door samenwerkend leren*. Vossiuspers UvA.

<http://www.velon.nl/uploads/nieuws/bestanden/niveauperhoging%20door%20samenwerkend%20leren%20-%20kohnstamm%202007%20perfect.pdf>

**General rights**

It is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), other than for strictly personal, individual use, unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

**Disclaimer/Complaints regulations**

If you believe that digital publication of certain material infringes any of your rights or (privacy) interests, please let the Library know, stating your reasons. In case of a legitimate complaint, the Library will make the material inaccessible and/or remove it from the website. Please Ask the Library: <https://uba.uva.nl/en/contact>, or a letter to: Library of the University of Amsterdam, Secretariat, Singel 425, 1012 WP Amsterdam, The Netherlands. You will be contacted as soon as possible.

NIVEAUVERHOOGING DOOR  
SAMENWERKEND LEREN

Deze studie is mogelijk gemaakt door het gezamenlijke kennisfonds van de Educatieve Hogeschool van Amsterdam (EHvA) en het Instituut voor de Lerarenopleiding van de Universiteit van Amsterdam (ILO - UvA).

*Instituut voor de Lerarenopleiding, Universiteit van Amsterdam  
Universiteit van Amsterdam/Hogeschool van Amsterdam, 2007*

Afbeelding omslag: Vlakverdeling bij opdrachtblad 'Escher'  
Vormgeving omslag: Kok Korpershoek, Amsterdam  
Opmaak: JAPES, Amsterdam

ISBN 978 90 5629 505 9  
© Vossiuspers UvA, Amsterdam, 2007

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voorzover het maken van kopieën uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16B Auteurswet 1912 j° het Besluit van 20 juni 1974, Stb. 351, zoals gewijzigd bij het Besluit van 23 augustus 1985, Stb. 471 en artikel 17 Auteurswet 1912, dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan de Stichting Reprorecht (Postbus 3051, 2130 KB Hoofddorp). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) dient men zich tot de uitgever te wenden.

NIVEAUVERHOOGING DOOR  
SAMENWERKEND LEREN

RIJKJE DEKKER EN MARIANNE ELSHOUT-MOHR

 VOSSIUSPERS UvA



## VOORWOORD

Voor u ligt de tweede uitgave van de Kohnstamm Kennisreeks. Deze reeks komt voort uit het besef dat er binnen de lerarenopleidingen veel kennis wordt gecreëerd, via onderzoek en praktijkervaringen. Die kennis blijft vaak binnenshuis, en zelfs binnenskamers, zodat collega's, leraren in scholen en andere belangstellenden er geen kennis van kunnen nemen.

### *Het Kennisfonds*

Om de kenniscirculatie binnen en vanuit de Amsterdamse lerarenopleidingen te versterken, riepen de directies van de EHvA en het Instituut voor de Lerarenopleiding UvA een Kennisfonds in het leven. Dit fonds moest de mogelijkheid bieden om onderzoek of ontwikkeling te faciliteren op terreinen waar anders geen aandacht voor kan zijn, om aanwezige kennis te ontsluiten en toegankelijk te maken voor de beroepspraktijk en om kennisdeling van medewerkers te stimuleren.

Het Kennisfonds beoogt de kenniscyclus te versterken: de samenhang tussen opleiding, professionalisering, onderwijsinnovatie, onderzoek en kennisontwikkeling. Het Kennisfonds biedt de mogelijkheid om bruggen tussen elk van die terreinen te slaan.

### *De Kohnstammreeks*

De resultaten van de activiteiten die het Kennisfonds subsidieert, worden gepubliceerd in de Kohnstammreeks. De Kohnstamm Kennisreeks zal vooral bestaan uit praktische handreikingen voor de didactiek binnen het basisonderwijs, voortgezet onderwijs, bve en lerarenopleiding op basis van onderzoek en ontwikkelwerk dat binnen het ILO en de EHvA plaatsvindt.

### *Niveauperhoging door samenwerkend leren*

De tweede uitgave van de Kohnstamm Kennisreeks doet recht aan het doel van de reeks: praktische handreikingen die direct te gebruiken zijn in de praktijk van het onderwijs.

De context van de publicatie is het reken- en wiskundeonderwijs, maar de notities zijn ook goed te passen op andere vakinhoudelijke domeinen.

Samenwerkend leren staat al enige tijd in de belangstelling. Vooronderstelling binnen het sociaal constructivisme is dat leren en kennisontwikkeling vooral tot stand komt door interactie met de omgeving, met anderen. Leraren kunnen hier op inspelen door interactie te stimuleren door vormen van samenwerkend leren toe te passen in hun lessen. Dit verhoogt de actieve betrokkenheid en leerlingen kunnen dan leren van elkaar.

Rijkje Dekker en Marianne Elshout-Mohr gaan in deze publicatie in op samenwerkend leren bij wiskunde en dan met name op de vraag hoe samenwerkend leren kan bijdragen aan verhoging van het niveau van inzicht van leerlingen. Zij hanteren daarbij een eenvoudig procesmodel waarin bepaalde kernactiviteiten mentale activiteiten van leerlingen stimuleren. Kern van het model is dat leerlingen hun aanpak bij het oplossen van wiskundige problemen aan elkaar uitleggen, bekritisieren en verantwoorden. Dit leidt tot reconstructie en verbetering van de aanpak en tot verhoging van inzicht.

Uit onderzoek naar de effecten van het procesmodel op het niveau van leerlingen blijkt dat de leraar een cruciale rol speelt. Bij samenwerkend leren gericht op de verhoging van het inzicht van leerlingen is het van belang dat de leraar een stap terug doet en voorkomt dat hij de denkprocessen van leerlingen verstoort door interventies op de inhoud. Leerlingen lopen dan het risico af te haken. Tegelijk is de rol van de leraar cruciaal in het bewaken van de voortgang van het proces van samenwerkend leren.

We hopen dat de bijdrage van Rijkje Dekker en Marianne Elshout-Mohr leraren en lerarenopleiders stimuleert om zelf het procesmodel toe te passen en om zich bewust te worden van de eigen rol bij het stimuleren (of belemmeren) van denkprocessen van leerlingen.

Gert Rijlaarsdam  
Marco Snoek

## VOORAF

In deze publicatie doen wij verslag van ons onderzoek naar samenwerkend leren en wiskundige niveauverhoging. Eerst presenteren wij een procesmodel dat we ontwikkeld hebben om de wisselwerking tussen samenwerkend leren en niveauverhoging te beschrijven. Vervolgens gaan we in op criteria voor geschikte opdrachten bij samenwerkend wiskunde leren, op de rol van de docent daarbij en op regulering van samenwerkend leren door leerlingen zelf. Wij maken daarbij gebruik van de verschillende onderzoeksprojecten die we de laatste tien jaar uitvoerden in het basisonderwijs, de brede onderbouw van het voortgezet onderwijs en de bovenbouw van het vwo. Uitgebreide informatie over ons onderzoek is te vinden in de artikelen waar we aan het eind van deze publicatie naar verwijzen.

## INTRO

Amsterdam, voorjaar 1995

R. en M., twee onderzoekers met een gemeenschappelijke belangstelling voor leerprocessen van kinderen, de één vanuit een wiskundig-didactische invalshoek, de ander vanuit een cognitief-psychologische, zitten bij elkaar. R. laat M. haar werk zien, een schema met ovaal, stukjes tekst en pijlen.

‘Kijk’, zegt R. ‘dit schema had ik voor mijn promotieonderzoek over wiskunde leren in kleine heterogene groepen gemaakt. Ik probeerde een soort ideale interactie tussen twee leerlingen A en B te beschrijven die samenwerkend aan een wiskundeopdracht ieder tot niveauverhoging komen.’

M. is geïnteresseerd. Ze bestudeert het schema nauwkeurig en heeft er allerlei vragen over. R. legt uit wat haar overwegingen zijn geweest. Voor een niveauverhogende discussie moeten leerlingen elkaar hun werk laten zien en uitleggen en het werk van elkaar bekritisieren. Door je denkwerk te tonen, word je je namelijk bewust van je eigen werk en door het uit te leggen, denk je er nog dieper over na. In een groepje kunnen leerlingen elkaar daartoe aanzetten met vragen als ‘Wat heb jij?’ of ‘Hoe kom je daarbij?’, vooral als het werk van de leerlingen verschillend is of de één niet op gang komt en de ander wel. Door elkaars werk te bekritisieren geef je aanzet tot het verbeteren



ervan en uit het verbeteren kan niveauverhoging blijken. Wat niveauverhoging is, moet je per onderwerp vastleggen. In R.'s promotieonderzoek ging het over grafieken en functies, in het bijzonder het lastige verband tussen snelheidswisselingen en afstand-tijdgrafieken.

M. zegt dat ze wel begrijpt dat het tonen en uitleggen van je werk niveauverhogend is voor je eigen leren, maar dat het bekritisieren van het werk van anderen niet per se niveauverhogend voor jezelf is. Het kan de ander tot niveauverhoging brengen als die de kritiek probeert te weerleggen en het eigen werk gaat verantwoorden, en het kan jezelf ook verrijken om goede kritiek te geven, maar het hoeft nog geen bijdrage te zijn aan je eigen niveauverhoging. R. probeert te verantwoorden waarom bekritisieren voor haar zo essentieel is, maar ze beseft gaandeweg dat het inderdaad een ander soort activiteit is dan tonen en uitleggen. Pas als de leerling door kritiek op het eigen werk, het eigen werk gaat verantwoorden en als dat niet lukt, zichzelf gaat bekritisieren, dan is het weer een wezenlijke stap in het eigen leerproces. M. en R. discussiëren verder en reconstrueren het schema samen. Het verantwoorden van eigen werk krijgt er een plek in en het bekritisieren een andere functie en zo ontstaat het procesmodel voor interactie en niveauverhoging.

## HET PROCESMODEL

Het procesmodel voor interactie en niveauverhoging dat wij ontwikkeld hebben, is oorspronkelijk voor wiskundige niveauverhoging bedoeld. We denken echter dat het breder toepasbaar is, wat we in feite met de bovenstaande beschrijving van de ontwikkeling van het procesmodel laten zien. Het model zoals we dat ontwikkeld en gepubliceerd hebben, presenteren we in Figuur 1. Als je in het procesmodel de middelste kolom van boven naar beneden leest, dan krijg je een beeld van de interactie tussen A en B. De kolommen links en rechts geven aan welke activiteiten er bij A en B optreden.

NIVEAUVERHOOGING DOOR SAMENWERKEND LEREN

**A en B werken aan hetzelfde wiskundige probleem. Hun werk is verschillend.**

A werkt		B werkt
<i>A vraagt B werk te tonen</i>	<i>Wat doe je? Wat heb je? Wat denk jij?</i>	<i>B vraagt A werk te tonen</i>
A wordt zich bewust van eigen werk		B wordt zich bewust van eigen werk
<b>A toont eigen werk</b>	<b>Ik heb dit... Ik doe dit... Ik zit zó te denken...</b>	<b>B toont eigen werk</b>
A wordt zich bewust van B's werk		B wordt zich bewust van A's werk
<i>A vraagt B werk uit te leggen</i>	<i>Waarom doe je dat zo? Hoe kom je daarbij?</i>	<i>B vraagt A werk uit te leggen</i>
A denkt na over eigen werk		B denkt na over eigen werk
<b>A legt eigen werk uit</b>	<b>Ik doe dit zo, omdat... Ik denk zo, omdat...</b>	<b>B legt eigen werk uit</b>
A denkt na over B's werk		B denkt na over A's werk
<i>A bekritiseert B's werk</i>	<i>Maar dat is toch niet goed, want...</i>	<i>B bekritiseert A's werk</i>
A denkt na over B's kritiek		B denkt na over A's kritiek
<b>A verantwoordt eigen werk</b>	<b>Ik dacht dat ik het wél goed had, omdat...</b>	<b>B verantwoordt eigen werk</b>
A denkt na over verantwoording		B denkt na over verantwoording
A bekritiseert eigen werk	O nee, het klopt toch niet, want...	B bekritiseert eigen werk
<b>A reconstrueert eigen werk</b>	<b>Ik kan het beter zó doen...</b>	<b>B reconstrueert eigen werk</b>

**vet: kernactiviteiten**

standaard: mentale activiteiten

*cursief: regulerende activiteiten*

*Figuur 1. Procesmodel voor interactie en niveauverhoging*

We hebben het procesmodel opgebouwd rond vier kernactiviteiten, die in het model vetgedrukt zijn: het (vertellen of) *tonen* van eigen (denk)werk, het *uitleggen* van eigen werk, het *verantwoorden* van eigen werk en het *reconstrueren* van eigen werk. We gaan ervan uit dat alle vier de kernactiviteiten nodig zijn voor niveauverhoging van het eigen werk. Het vertellen of tonen maakt je namelijk bewust van je eigen (denk)werk, het uitleggen maakt dat je er dieper over gaat nadenken, het verantwoorden betekent dat je het toetst aan bestaande (wiskundige) normen, dat je bewijst dat het klopt wat je hebt. Het reconstrueren, dus het werkelijk beter maken van je werk, doe je als je beseft dat je werk echt tekortkomingen heeft die je niet kunt verantwoorden. Je eigen (denk)werk komt dan op een hoger niveau.

De kernactiviteiten zou je voor jezelf kunnen vervullen, maar wij veronderstellen dat het veel gemakkelijker is als een medeleerling je ertoe aanzet en op die manier jouw niveauverhoging reguleert. Dit reguleren, dat in het model cursief staat aangegeven, gebeurt door naar elkaars werk te vragen, elkaar uitleg te vragen en kritiek te geven. Een situatie waarin dat als vanzelf zou kunnen optreden, is als leerlingen samen aan een opdracht werken en hun (denk)werk verschillend is. Je kunt elkaar dan met vragen als ‘Wat heb jij?’, stimuleren het werk te tonen. En als je het (denk)werk van de ander niet snapt, kun je uitleg vragen. Als je dan vervolgens het (denk)werk van de ander begrijpt, maar niet goed vindt, kun je door kritiek te geven de ander tot verantwoorden van het eigen werk aanzetten. En als die verantwoording niet lukt, gaat de ander zichzelf bekritisieren en kan niveauverhoging op gang komen.

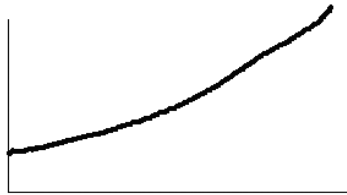
De kernactiviteiten en de regulerende activiteiten zijn observeerbaar. In het procesmodel staan ook mentale activiteiten genoemd die niet of veel minder observeerbaar zijn, zoals het bewust worden van en nadenken over het eigen werk en dat van de ander. Ze staan in het model standaard weergegeven.

## EEN VOORBEELD: ANNA EN BEN

We maken het model nu concreter met een voorbeeld dat we ook in onze artikelen over het procesmodel bespreken. Twee leerlingen uit een heterogene brugklas, Anna en Ben, werken aan de volgende wiskundeopdracht:

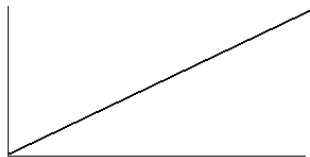
Maak een grafiek waarin je laat zien hoe de afstand die je aflegt als je 's ochtends naar school gaat, groter wordt.

Na enige tijd kijkt Ben op en zegt: ‘Wat doe jij? Hoe heb jij het?’  
Anna *toont* haar werk:



*Figuur 2. Grafiek van Anna*

*Ze legt uit:* ‘Kijk, ik heb het zó gedaan, want in het begin ga ik langzaam, dus dan begint de grafiek laag en gaat dan langzaam omhoog.’ Aansluitend vraagt zij: ‘Heb jij jouw grafiek ook zo laten beginnen?’  
Ben laat zien hoe hij begonnen is:



*Figuur 3. Grafiek van Ben*

Ben: ‘Ik heb het anders gedaan. Ik dacht dat je bij nul moest beginnen en dat het dan gewoon een rechte lijn werd. In het begin fiets ik ook langzaam, maar ik weet niet hoe je dat... Maar wat jij daar hebt, dat klopt toch niet?’  
Anna legt haar eigen werk uit en probeert het te *verantwoorden*: ‘Ja, maar als je langzaam rijdt, groeit de afstand langzaam, dus de grafiek gaat dan langzaam omhoog... Wacht even... dat klopt niet helemaal. Ik moet hem inderdaad wel bij nul laten beginnen, want in het begin heb je nog niets afgelegd. Maar het wordt géén rechte lijn, want ik rijd niet de hele weg in één tempo. Dus dan moet ik zo...’

Anna *reconstrueert* het eigen werk en komt tot de conclusie dat zij haar grafiek kan verbeteren.

## CRITERIA VOOR OPDRACHTEN

Opdrachten die een niveauverhogende discussie uitlokken, moeten aan een aantal criteria voldoen. Allereerst moeten ze voor de leerlingen *realistisch* zijn. Dat wil zeggen dat ze zich er een voorstelling van kunnen maken, dat ze betekenisvol voor de leerlingen zijn. Dit criterium is belangrijk om leerlingen op gang te krijgen. De context van het fietsen naar school zoals in het voorbeeld van Anna en Ben, is voor veel brugklasleerlingen zeer vertrouwd.

Vervolgens is het belangrijk dat de opdrachten *complex* zijn. Dat wil zeggen dat er verschillende vaardigheden nodig zijn om ze te maken: het nauwgezet lezen van een stukje tekst, een verhaaltje schrijven, een grafiek of een tabel van een situatie maken, een model bouwen, letterlijk en figuurlijk. In de opdracht waar Anna en Ben aan werken, gaat het om het zich goed voorstellen van de situatie, het vertalen van veranderingen van de snelheid in veranderingen van de toename van de afgelegde afstand en vervolgens deze weergeven in een afstand-tijdgrafiek. Anna en Ben zijn niet beide tegelijk in al deze vaardigheden goed. Ze hebben elkaar nodig en dat weerspiegelt dit criterium ook: het nut van samenwerking.

Essentieel is dat de opdrachten *constructief* zijn, in die zin dat er iets gemaakt of geconstrueerd moet worden: een verhaaltje, een tabel, een grafiek, een model. Het denkwerk van de verschillende leerlingen wordt dan zichtbaar en daardoor gemakkelijker onderwerp van discussie: de verschillen vallen op. Anna en Ben maakten een grafiek en de verschillen vielen in het oog en leidden tot discussie. In het geval van Anna en Ben maakte ieder een eigen grafiek over een eigen tochtje. Dat kan echter ook heel goed een gezamenlijke grafiek zijn naar aanleiding van een verhaaltje over een fietstocht. Dan nóg komen de verschillen naar voren. Bij Anna en Ben zou dat dan al zijn als ze moesten beslissen waar de grafiek zou moeten beginnen.

Het kerncriterium voor opdrachten is dat ze echt gericht zijn op *niveauverhoging*, in die zin dat ze op een lager niveau benaderd tot verkeerde oplossingen leiden. In de opdracht van Anna en Ben zit het niveauverhogende in het feit dat ze een grafiek over de afgelegde afstand moeten maken, terwijl ze eerst vanuit snelheid denken. Leerlingen die nog op een visueel niveau zijn, dat wil zeggen dat ze zich de situatie

voorstellen zoals die is en vanuit hun ervaring redeneren, zullen zich wel bewust zijn van wisselingen in snelheid en dat ook nog eenvoudig in een grafiek over de snelheid kunnen weergeven: een toenemende snelheid leidt tot een stijgende snelheid-tijdgrafiek en een dalende snelheid tot een dalende snelheid-tijdgrafiek. Maar snelheidwisselingen laten zich niet simpel in een afstand-tijdgrafiek vertalen. Daarvoor moet je je bewust zijn van de veranderingen in de afgelegde afstand en die vervolgens goed weergeven: een toenemende snelheid leidt tot een steeds steiler wordende afstand-tijdgrafiek en een afnemende snelheid tot een steeds minder steil lopende afstand-tijdgrafiek. Er is dus niet meer een direct verband tussen situatie en grafiek. Je hebt meer inzicht nodig of je moet op een hoger niveau in je leren zijn om de grafiek goed te maken. Bij Anna en Ben zie je dat. Ben denkt aan een eenvoudig lineair verband en Anna laat haar grafiek niet bij 0 beginnen. De onderlinge vergelijking en discussie leiden tot beter begrip, tot niveauverhoging.

Het is niet zo dat in een leergang alle opdrachten tegelijk aan deze criteria moeten voldoen. Het kerncriterium is vooral van belang voor opdrachten in het midden van de leergang, een soort schakelopdrachten. In de leergang waar Anna en Ben aan werkten, waren de eerste opdrachten gericht op het maken van temperatuur-tijdgrafieken en snelheid-tijdgrafieken. Die opdrachten voldeden aan de eerste drie criteria. Toen pas moesten ze een afstand-tijdgrafiek maken aan de hand van snelheidswisselingen. Die opdracht voldeed aan alle vier de criteria, dus ook aan het criterium *niveauverhoging*.

#### EEN VOORBEELD: BEERTJES BROEK

We bespreken nu een opdracht voor samenwerkend leren die aan bovenstaande criteria voldoet, maar niet uit de wiskunde afkomstig is. Het is een voorbeeld dat de tweede auteur van dit artikel op een internationale workshop heeft gebruikt om de deelnemers de kernbegrippen van ons onderzoek en de criteria voor opdrachten duidelijk te maken. Zo introduceerde zij de opdracht:

‘Kijk, wat een leuk beertje. (Op dit moment toonde zij een teddybeertje van 15 cm lengte). Beertje is van mijn echtgenoot. Sommigen van u kennen hem, het is Professor dr J.J. Elshout. Ik beloofde hem van deze geruite stof een broek te maken voor Beertje. (Op dit moment toonde zij een stukje stof). Ik

ben geen kleermaker, net zo min als u. Ik heb wel de maten opgenomen. (Op dit moment werd getoond hoe de maten waren genomen, om het middel, onder het kruis langs en van het middel tot de zijkant van de voet. De maten werden getoond op de overhead). Nu wil ik u vragen een knippatroon te maken. Laat mij zien hoe ik onderdelen uit de stof moet knippen, die aan elkaar kunnen worden genaaid tot een broek voor deze beer. Bedenk wel dat ik mijn man wil verrassen. Dat lukt alleen als Beertje een broek van goede snit krijgt. Werk daarom met elkaar samen en gebruik alle kennis en ervaring die aanwezig is. U heeft een kwartier de tijd om een knippatroon te maken voor een goed passende broek.’

Deze opdracht is *realistisch* in die zin dat door de presentatie ieder zich een voorstelling van de opdracht kan maken. De opdracht is *complex*, want het ontwerpen van de broek vereist vaardigheid in schetsen, visualiseren en precies werken. De opdracht is gericht op *constructie*: het maken van een knippatroon. De opdracht mikt op *niveauperhoging*. Ieder die enige kennis van patroonontwerpen heeft, kent de valkuilen voor beginners. In de presentatie wordt bewust naar de als kritisch bekendstaande professor Elshout verwezen om te zorgen dat de deelnemers zich niet gemakkelijk tevreden zouden stellen.

Tijdens het werken aan deze opdracht in kleine groepen, werd er heel druk overlegd. Mensen met enige voorkennis omtrent broekpatronen, trachtten anderen te overtuigen van hun aanpak. Er werd veel geschetst, gemaakt en uitgetoond waarbij iedereen telkens de constructies becommentarieerde. Er ontwikkelde zich binnen de groepen een soort vaktermen om de essentiële elementen van de patronen te benoemen. Het werk leverde heel wat producten op: patronen voor quilts, luiers, broeken en zwembroeken. De deelname verliep heel geanimeerd. Niveauverhogend leren is wel moeilijk, maar kan ook leuk zijn. De gemeenschappelijke ervaring leverde de deelnemers aan de workshop een basis voor wat wij bedoelen met niveauverhoging door samenwerkend leren, en verhelderde de criteria waar opdrachten voor niveauverhoging door samenwerkend leren aan moeten voldoen.

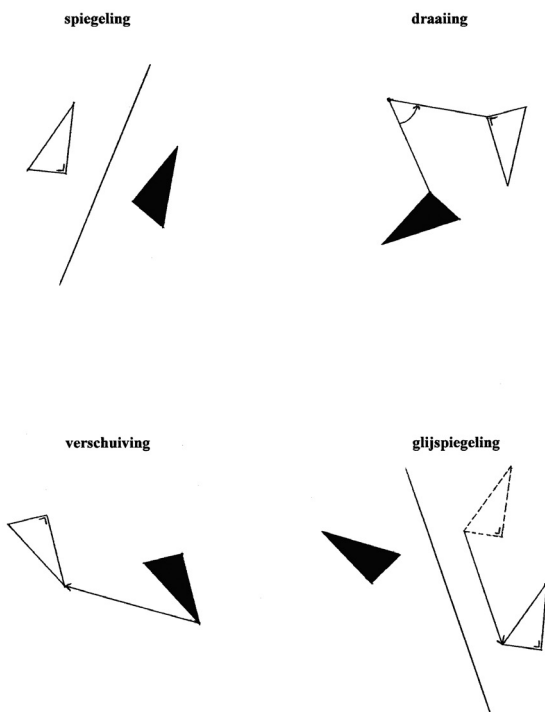
## DE ROL VAN DE DOCENT

We weten nu welke processen we bij leerlingen op willen roepen en aan welke criteria opdrachten moeten voldoen om dat mogelijk te maken, maar hoe moet de docent dit begeleiden? We hebben dit onderzocht bij vwo 5-leerlingen die in drietallen werkten aan speciaal ontworpen lesmateriaal voor wiskunde B. De groepjes waren zo samengesteld dat de leerlingen verschilden in voorkennis wat de opdrachten betrof. Dit om ervoor te zorgen dat er verschillend (denk)werk tussen de leerlingen naar voren zou komen, wat het proces zoals beschreven in het procesmodel op gang kan brengen. Vaak weet een docent niet precies wat de voorkennis is van leerlingen. In dat geval is het handig om bij het samenstellen van de groepjes de betere leerlingen over de groepjes te spreiden. Het lesmateriaal – in het geval van het onderzoek opdrachtbladen rond meetkundige afbeeldingen, per groepje één groot opdrachtblad en een hulplaatje (zie Figuur 4) – vereist een introductie waarbij de docent de leerlingen vertelt waar de opdrachten over gaan, een motiverende inleiding waarbij nog niets wat de inhoud betreft wordt weggegeven. Dan legt de docent uit wat hij van de groepjes verwacht en welke begeleiding hij zal geven. Deze hulp zal minimaal zijn om zoveel mogelijk het (denk)werk bij de leerlingen zelf te laten. Maar waar kan de docent zijn hulp dan het beste op richten? Wij onderzochten twee soorten hulp: proceshulp en producthulp.

Proceshulp is begeleiding die erop gericht is dat de activiteiten zoals in het procesmodel beschreven staan, ook werkelijk voorkomen. Daar komt de naam ‘proceshulp’ vandaan. Dus deze docent legt uit dat het belangrijk is dat leerlingen elkaar hulp vragen en geven, want daar leer je van, en elkaars werk bekritisieren, want daar wordt het beter van. Verder zegt deze docent duidelijk dat hij de groepjes tijdens het samenwerkend leren niet inhoudelijk gaat helpen, maar dat hij erop let dat ze daadwerkelijk elkaar uitleg geven en bekritisieren. Ook spreekt hij het vertrouwen uit dat ze er met elkaar uit kunnen komen en dat hij nieuwsgierig is naar hun eindproducten. Tijdens het werk observeert de docent de groepjes en hij let er vooral op of alle deelnemers participeren. Dat is van een afstandje wel te zien. Voor het volgen van het proces van uitleggen en bekritisieren moet je alweer dichter op het groepje zitten, wat op zichzelf het proces kan verstoren.



**Meetkundige afbeeldingen**



*Figuur 4. Hulpblad 'Meetkundige afbeeldingen'*

Producthulp is begeleiding die erop gericht is dat de groepjes inhoudelijk een duwtje krijgen als ze vast komen te zitten. Dat vertelt deze docent ook, tegelijk geeft hij aan dat de hulp minimaal zal zijn. Tijdens het werk zal deze docent zich laten leiden door de vragen die hij krijgt en door de producten van de leerlingen: hun werk op het opdrachtblad waar ze op dat moment mee bezig zijn. Dat is het zichtbare werk van het groepje, vandaar de naam 'producthulp'.

We zijn ervan uitgegaan dat deze twee soorten hulp niet makkelijk te combineren zijn. Als de procesdocent inhoudelijke hulp zou geven, zou hij opeens een partner in het interactieproces binnen de groepjes worden en het proces zoals beschreven in het model kunnen verstoren. Het (denk)werk van de docent wordt immers zelden door de leerlingen bekritiseerd, maar bijna altijd voor 'waar' aangenomen. Kritiek van de docent leidt meestal niet tot verantwoording, maar eerder tot verwerping van het eigen (denk)werk. Inhoudelijke inbreng van de docent kan dus het proces zoals beschreven in het procesmodel verstoren en daardoor niveauverhoging eerder remmen dan stimuleren. Als de productdocent zich met het stimuleren van de regulerende en kernactiviteiten gaat bezig houden, krijgt hij eveneens een lastige dubbelrol: aanmoedigen dat de leerlingen er met elkaar uit kunnen komen als ze de regulerende en de kernactiviteiten uitvoeren en tegelijk hulp aanbieden. Deze dubbelrol kan wel eens nodig zijn, bijvoorbeeld als het lesmateriaal gebreken vertoont. In ons onderzoek hebben we de rollen van proceshulp en producthulp echter scherp onderscheiden om het effect op niveauverhoging te kunnen onderzoeken.

Belangrijkste uitkomst van ons onderzoek is dat er bij de procesdocent meer niveauverhoging optreedt bij de leerlingen dan bij de productdocent. Bij de productdocenten constateerden we zelfs bij een aantal leerlingen niveauverlaging. Hoewel we dit resultaat vanuit ons procesmodel verwachtten, waren we toch verrast. De docenten in ons onderzoek die de productrol vervulden, deden dat met zoveel ingehouden betrokkenheid en kwaliteit dat we tijdens het onderzoek dachten dat de meer passieve procesdocent daar niet tegenop zou kunnen. Het is wel goed om te bedenken dat dit onderzoek was bij vwo 5-leerlingen die voor wiskunde B gekozen hadden en die met lesmateriaal werkten dat heel zorgvuldig en speciaal voor het onderzoek ontwikkeld was. Bij minder gemotiveerde leerlingen of minder goede opdrachten zou het resultaat wel eens anders of minder duidelijk kunnen zijn.

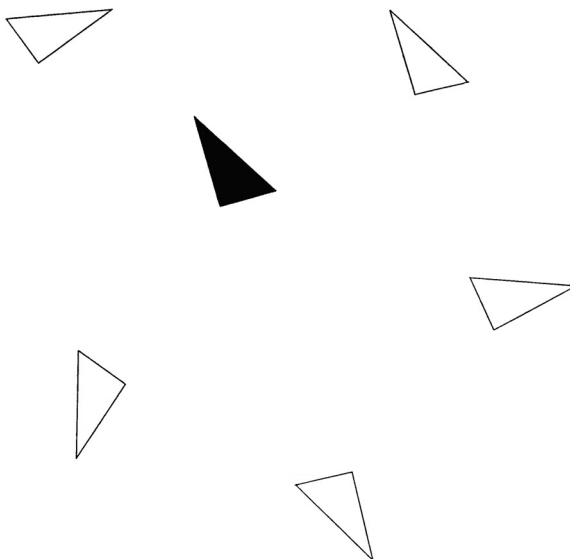
#### EEN VOORBEELD: STORENDE HULP VOOR STEFAN

Om duidelijk te maken dat de productrol storend kan werken op de niveauverhoging zoals beschreven in het procesmodel, gaan we in op het leren van Stefan. Stefan zit in een groepje met Maaike en Rolf. Op de voortoets scoorde Maaike het best, Rolf het minst en Stefan zat daar tussenin. Maaike wordt ook door haar docent gezien als een wiskundig sterke leerling, maar niet zo sociaal. Tijdens het werken aan de opdrachten

overlegt ze echter intensief met Stefan en Rolf. Ze werken aan lesmateriaal over meetkundige afbeeldingen en willen op hun opdrachtblad ‘Driehoekje leggen’ (zie Figuur 5) laten zien dat een gegeven rechthoekige driehoek via een draaiing op een andere rechthoekige driehoek terecht komt.

### Driehoekje leggen

In het onderstaande ontwerp kun je het zwarte driehoekje met telkens één **meetkundige afbeelding** op een wit driehoekje leggen. Kun je ontdekken met welke? Onthul de constructie van het ontwerp door (glij)spiegelassen, verschuifpijlen, draaipunten en draaihoeken zo nauwkeurig mogelijk weer te geven.



*Figuur 5. Opdrachtblad ‘Driehoekje leggen’*

Ze proberen deze draaiing zichtbaar te maken, te reconstrueren. Dat is een heel lastige opdracht in het materiaal. De leerlingen hebben een hulpblad waar de meetkundige afbeeldingen op staan (Figuur 4). Rolf en Stefan hebben een aanpak bedacht die te simpel is: ze hebben de twee overeenkomstige rechte hoeken met een lijn verbonden en daar het midden van aangegeven. Dat zou dan volgens Rolf en Stefan het draaipunt zijn. Net zoals bij de reconstructie van de halve draai die ze net ervoor op het opdrachtblad hebben gemaakt. Maaïke heeft kritiek op de aanpak van Rolf en Stefan en ze discussieert net zolang met ze door tot ze ook zelf overtuigd raken dat hun constructie niet goed is. Maaïke zet aan tot reconstructie en begint dunnetjes ook de andere overeenkomstige hoekpunten van de driehoeken met elkaar te verbinden en middens op te zoeken, al zegt ze niet te weten waarom ze het doet. Rolf doet met haar mee, Stefan aarzelt. Hun interactie verloopt volgens het procesmodel met fasen van tonen, uitleggen, bekritisieren, verantwoorden en reconstrueren. Dan komt de docent langs en Maaïke richt zich tot hem en wijst op de constructie van Stefan en Rolf:

Maaïke: die draaiing hier die klopt niet...

[...]

hoe kan je een draaiing berekenen?

Docent: nou ik zie dat jullie in ieder geval gewerkt hebben met de hoekpunten van de rechthoekige driehoek

Rolf: ja

Docent: daar heb je iets mee gedaan, maar je begrijpt zelf wel dat dat niet voldoende is want als dit bijvoorbeeld ietsje gedraaid zou zijn en die ook ietsje gedraaid zou zijn dan krijg je toch een andere draaiing hè? Dus je moet niet alleen werken met de hoekpunten van de rechthoekige driehoek maar je moet ook werken met twee andere hoekpunten

Maaïke: ja daar heb je hier van die middelpunten, wat moet je daar dan mee

Docent: ja ja je bent er je bent er wel uit dat draaipunt ligt op de middelloodlijn van dit lijnstukje

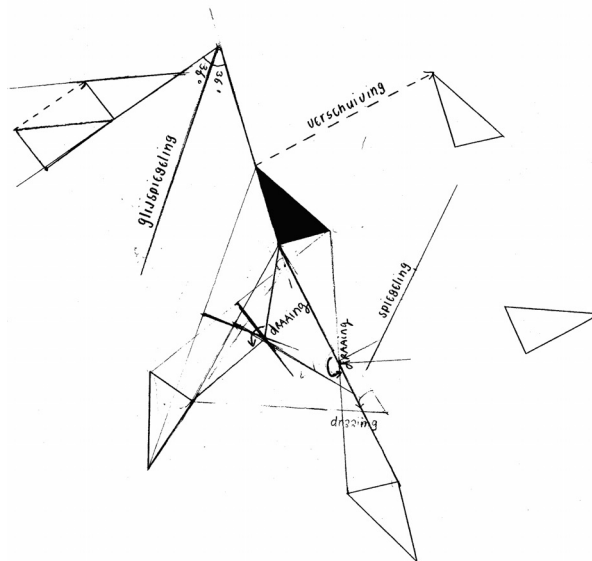
In het vervolg is te zien hoe Maaïke het spoor dat de docent voor haar uitzet aarzelend volgt. Ze blijft hem vragen hoe nu verder en uiteindelijk geeft de docent de constructie weg, wat natuurlijk niet de bedoeling was. Rolf houdt Maaïke nog wel bij, voornamelijk door telkens het tekenen op het opdrachtblad voor zijn rekening te nemen. De constructie komt uiteindelijk wel goed op hun blad te staan. Hun product is

grotendeels in orde (op de reconstructie van de glijspiegeling, die linksboven op het opdrachtblad staat, na):

*Maaike, Stefan, Rolf*

### Driehoekje leggen

In het onderstaande ontwerp kun je het zwarte driehoekje met telkens één meetkundige afbeelding op een wit driehoekje leggen. Kun je ontdekken met welke?  
Onthul de constructie van het ontwerp door (glij)spiegelassen, verschuifpijlen, draaipunten en draaihoeken zo nauwkeurig mogelijk weer te geven.



*Figuur 6. Opdrachtblad van het productgroepje*

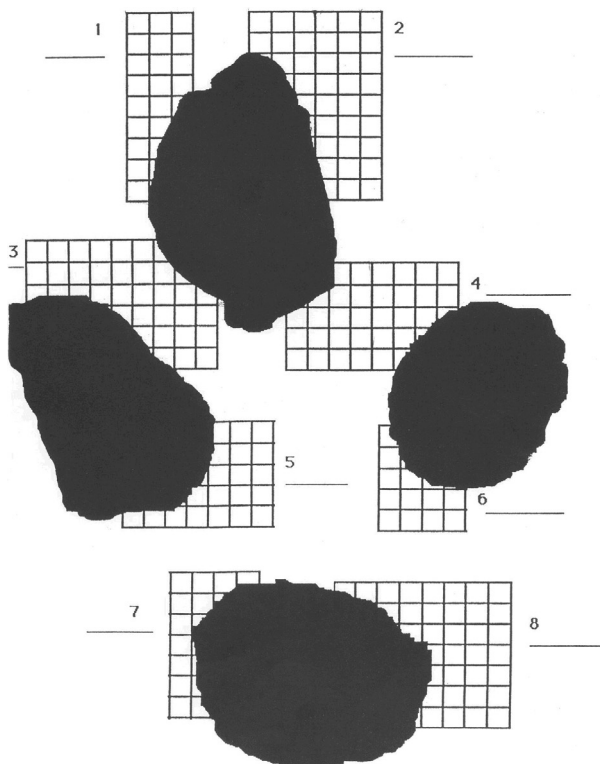
Het proces dat tot dit product geleid heeft, is echter verre van ideaal. Stefan valt gaandeweg helemaal stil. De lesverslagen van het vervolg laten zien dat als in dit groepje draaiing ter sprake komt, Stefan nauwelijks meepraat. Op zijn eindtoets maakt Stefan de vragen rond draaiing slechter dan op zijn voortoets.

Wat is hier de valkuil voor de docent? Men zou kunnen inbrengen dat hij meer door had moeten vragen naar het feitelijke (denk)werk van dit groepje. Hij zou zich bijvoorbeeld niet alleen op Maaïke moeten richten, maar ook op Stefan en Rolf. Maar het is Maaïke die de vraag stelt. Zij denkt waarschijnlijk met haar groepsgenoten niet verder te komen en zoekt dus extra input van de docent. En misschien ging de docent er wel van uit dat ze alledrie even ver waren in hun denken en dacht hij dat als hij het Maaïke duidelijk wist te maken, de anderen weer door haar ingepriakt zouden kunnen worden. Maar Maaïke heeft zelf de grootste moeite de constructie die de docent aandraagt te volgen. Het is ook niet zo dat de docent zich niet op het (denk)werk van het groepje oriënteert, hij bestudeert hun opdrachtblad en ziet daar elementen staan die erop lijken te duiden dat ze al met de officiële constructie van een draaiing bezig zijn. Dat Maaïke in feite niet goed wist wat ze deed, kan hij aan hun werk niet zien. Hij werkt ook in de klas, waar meerdere groepjes bij deze lastige opdracht zijn hulp vragen, dus hij maakt een inschatting met welke aanwijzing ze verder kunnen. Maar hij zat mis. Het eigen (denk)werk van het groepje stopt na zijn interventie en alleen via nog meer hulp van de docent komt er uiteindelijk wel een goede constructie op het opdrachtblad te staan, maar het is geen eigen constructie, in de zin van door de leerlingen zelf bedacht.

Dit is voor veel docenten een heel herkenbare situatie: als leerlingen weten dat je ze zult helpen, vragen ze ook je hulp als je in de buurt bent. En als je dan hulp geeft en je probeert het beperkt te houden, begint het vissen naar meer hulp in plaats van het zelf dieper nadenken. Dit is (vaak) niet een kwestie van onwil van de leerling, het is meer omdat de hulp niet past bij het al gedane (denk)werk en om precies achter het gedane (denk)werk te komen, is voor docenten in een klassensituatie haast ondoenlijk. Dus inspectie van de gemaakte producten en eigen inschatting van de lastige stappen voor leerlingen vormen dan al gauw de leidraad voor het handelen van de docent.

## ZELFREGULERING DOOR LEERLINGEN

En dan nu weer helemaal terug bij de leerlingen en wel bij jonge leerlingen uit groep 5 van 8 jaar oud. Ze werken in tweetallen aan werkbladen met reken/wiskundeopdrachten. Elk tweetal heeft één werkblad. Op het werkblad waaraan gewerkt wordt, staan roosters van verschillend formaat, gedeeltelijk bedekt door vlekken (zie Figuur 7).



Figuur 7. Werkblad 'Vlekken'

De leerlingen wordt gevraagd bij elk rooster met vlek een sommetje te maken, bijvoorbeeld bij het eerste rooster van 3 bij 9 hokjes zouden ze kunnen zetten:  $3 \times 9 = 27$ . De vlek zorgt er dan voor dat ze niet 'zomaar' alle hokjes gaan tellen, maar iets gaan doen als herhaald optellen, vermenigvuldigen of een combinatie daarvan. De opdrachten zijn daardoor gericht op niveauverhoging: van tellen naar vermenigvuldigen. Ze zijn ook complex, constructief en zo visueel gepresenteerd dat ze realistisch zijn, in de zin van goed voorstelbaar. De leerlingen zijn gewend samen te werken en hun lerares heeft ze geleerd om samen te overleggen en naar elkaars ideeën te luiste-

ren. Ze mogen de opdrachten op een verschillende manier oplossen, als ze het maar wel over het antwoord eens zijn. Aan het eind van de les worden de verschillende oplossingen door de leerlingen gepresenteerd en onder leiding van de docent besproken. De leerlingen moeten dus iets reken/wiskundigs leren wat concentratie en inspanning vereist, ze moeten samenwerken, wat vereist dat ze met elkaars ideeën en activiteiten rekening houden en ze moeten op tijd met de opdrachten klaar zijn. Dat zijn dus drie perspectieven.

We hebben bij een tweetal, Jim en Amy, onderzocht in hoeverre de betreffende leerlingen deze drie perspectieven in de gaten hielden en met elkaar in balans hielden. Hoe ze dus in feite hun samenwerkend leren reguleerden. In ons artikel over zelfregulering gaan we daar heel uitgebreid op in. We vatten het proces hier kort samen:

In het begin komt Jim vlot op gang en is al bezig bij het eerste rooster 3 keer 9 uit te rekenen door 9 te verdubbelen en dan door te tellen, maar Amy heeft moeite met de tafels en kan daardoor Jim niet volgen. Jim legt zijn denkwerk ook niet duidelijk uit. De samenwerking loopt gevaar. Amy stelt een andere werkwijze voor: invullen van de roosters met wit potlood en dan hokjes tellen. Jim gaat met haar mee en zo gaan ze een tijdje gezamenlijk, maar wel op laag niveau door. Dan stelt Jim een andere strategie voor: het tellen van de helft van het rooster en dan verdubbelen. Dat werkt vlotter. Amy pakt dat direct op, ook minder makkelijke roosters weten ze zo te ‘tellen’, en zo komt niveauverhoging voor beiden toch weer op gang. Naar aanleiding van het halveren van een rooster met een oneven aantal rijen, ontspint zich zelfs een hele discussie over breuken, maar niet te lang, want ze blijven ook de tijd in de gaten houden.

Wat opviel was dus dat ze tijdens het samenwerkend leren de drie perspectieven in balans probeerden te houden. We zagen dat vooral als de balans verstoorde, want dan probeerden ze deze weer te herstellen en met succes: Amy zorgt voor een werkwijze waarbij ze met Jim kan samenwerken, Jim brengt de nieuwe werkwijze op een hoger plan en beiden letten op de productie en de tijd. Dit is relevant voor de docent. Deze zal, als zij de groepjes wil begeleiden, de leerlingen aan kunnen moedigen in dit proces. Net als bij proceshulp gaat het er hier dus weer om dat de docenten de zelfregulatie van het samenwerkend leren door de leerlingen aanmoedigt en oppast deze niet te verstoren.



RIJKJE DEKKER EN MARIANNE ELSHOUT-MOHR

Om niveauverhoging door samenwerkend leren tot stand te brengen, hangt uiteindelijk dus veel af van een zorgvuldige voorbereiding: uitgekende opdrachten, goede samenstelling van de groepjes, ondersteunende klassennormen, aanmoediging door de docent en vooral het vertrouwen dat de leerlingen met elkaar een heel eind kunnen komen.

### Over het procesmodel:

Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (1996). 'Zelfstandig leren doe je niet alleen'. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 15(2), 20-27.

Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (1998a). 'A process model for interaction and mathematical level raising'. *Educational Studies in Mathematics*, 35(3), 303-314.

### Over criteria voor opdrachten:

Dekker, R., Elshout-Mohr, M., & Wood, T. (2004). 'Working together on assignments: Multiple analysis of learning events'. In J. van der Linden & P. Renshaw (Eds.), *Dialogic Learning* (pp. 145-170). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Elshout-Mohr, M., & Dekker, R. (2000). 'Opdrachten om samen van te leren'. In J. van der Linden & E. Roelofs (Eds.), *Leren in dialoog* (pp. 35-63). Groningen: Wolters-Noordhoff.

### Over de rol van de docent:

Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (1998b). 'Niet het product, maar het proces'. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 17(2), 33-38.

Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (1999). 'Soms moet je ervan afblijven'. *Nieuwe Wiskrant*, 18(3), 9-13.

Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (2004). 'Teacher interventions aimed at mathematical level raising during collaborative learning'. *Educational Studies in Mathematics*, 56(1), 39-65.

### Over zelfregulering door leerlingen:

Dekker, R., Elshout-Mohr, M., & Wood, T. (2006). 'How children regulate their own collaborative learning'. *Educational Studies in Mathematics*, 62(1), 57-79.

RIJKJE DEKKER EN MARIANNE ELSHOUT-MOHR

Met dank aan Hein Broekkamp, Lidy Wesker-Elzinga en Gert Rijlaarsdam voor hun commentaar op een eerdere versie van dit artikel.

Voor informatie en opvragen artikelen:

Rijkje Dekker  
Universiteit van Amsterdam  
Instituut voor de Lerarenopleiding  
E-mail: [r.dekker@uva.nl](mailto:r.dekker@uva.nl)