



**UvA-DARE (Digital Academic Repository)**

**A supersymmetric model for lattice fermions**

Huijse, L.

[Link to publication](#)

*Citation for published version (APA):*

Huijse, L. (2010). A supersymmetric model for lattice fermions

**General rights**

It is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), other than for strictly personal, individual use, unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

**Disclaimer/Complaints regulations**

If you believe that digital publication of certain material infringes any of your rights or (privacy) interests, please let the Library know, stating your reasons. In case of a legitimate complaint, the Library will make the material inaccessible and/or remove it from the website. Please Ask the Library: <http://uba.uva.nl/en/contact>, or a letter to: Library of the University of Amsterdam, Secretariat, Singel 425, 1012 WP Amsterdam, The Netherlands. You will be contacted as soon as possible.

# Samenvatting

De meeste materialen om ons heen zijn goed begrepen. Ze zijn onder te verdelen in elektrisch geleidende en isolerende materialen, zoals bijvoorbeeld koper en plastic, en halfgeleiders, zoals silicium. In de vaste fase zijn de atomen, waaruit het materiaal is opgebouwd, gekristalliseerd en worden de materiaaleigenschappen gedomineerd door de elektronen die het zwakst aan de atoomkern gebonden zijn. Materialen kunnen dus beschreven worden door slechts te kijken naar deze elektronen. De atoomkernen worden vrijwel volledig buiten beschouwing gelaten, ze vormen slechts een achtergrond waarin de elektronen kunnen bewegen en wisselwerken. Zo'n versimpelde weergave van een materiaal, dat een complex geheel is van atoomkernen en elektronen die allerlei krachten op elkaar uitoefenen, noemen we een roostermodel, of kortweg, model. Gewone materialen, zoals koper, aluminium en silicium, kunnen worden beschreven met een model waarin de elektronen nauwelijks krachten op elkaar uitoefenen. In de afgelopen decennia zijn er echter verschillende materialen ontdekt met bijzondere eigenschappen, die theoretisch nog slecht begrepen zijn. De oorzaak voor dit achterblijvende begrip ligt in het feit dat de elektronen in deze materialen elkaar sterk afstoten en dus sterk wisselwerken. Dit proefschrift beschrijft een model voor elektronen met sterke wisselwerking.

Het begrijpen van elektronen met sterke wisselwerking is niet alleen belangrijk vanuit het perspectief van de fundamentele natuurkunde, maar maakt uiteindelijk ook de weg vrij voor technologische vooruitgang. Een mooi voorbeeld is de ontdekking van het GMR-effect (voor *giant magnetoresistance*), waarvoor in 1997 de Nobelprijs voor de natuurkunde is uitgereikt. Dit effect -een grote verandering in elektrische weerstand zodra een sterk magneetveld wordt aangelegd- wordt veroorzaakt door de sterke wisselwerking van de elektronen in het materiaal. De commerciële toepassing van dit effect heeft geleid tot een dramatische toename in de opslagcapaciteit van harde schijven. Een ander voorbeeld is supergeleiding; het verschijnsel dat de elektrische weerstand van sommige materialen beneden een bepaalde temperatuur opeens helemaal verdwijnt. Supergeleiding treedt bij de meeste materialen pas op wanneer ze worden afgekoeld tot nabij het absolute nulpunt (-273 graden Celcius). Er zijn echter materialen die bij een relatief hoge temperatuur supergeleidend zijn. Het record ligt momenteel rond -140 graden Celcius. Deze materialen bestaan uit een gelaagde structuur van onder andere koperoxide vlakken. In deze koperoxide vlakken is de wisselwerking tussen de elektronen zeer sterk. Supergeleiders vinden nu al hun toepassing in, bijvoorbeeld, telecommunicatie, waar ze worden gebruikt om de capaciteit van het netwerk te vergroten. Het moge duidelijk zijn dat de ontdekking van een materiaal dat bij kamertemperatuur supergeleidt, een technologische revolutie tot gevolg zal hebben.

Er zijn veel verschillende materialen waarvan de eigenschappen niet goed begrepen zijn, elk materiaal heeft zijn eigen details, maar de grote gemene deler is steeds dat de elek-

tronen in die materialen sterk met elkaar wisselwerken. Deze eigenschap moet dus zeker in een model, dat dit soort materialen beschrijft, terugkomen. Het probleem is echter dat traditionele technieken om aan modellen te rekenen niet werken wanneer de elektronen sterk wisselwerken. Het is dus van belang nieuwe technieken te verkennen. In 2003 hebben P. Fendley, K. Schoutens en J. de Boer een nieuw model voorgesteld voor elektron-achtige deeltjes met sterke wisselwerking. Dit model heeft een bijzondere eigenschap die het mogelijk maakt buiten de gebaande paden te treden. Deze eigenschap is supersymmetrie, een symmetrie die oorspronkelijk is geïntroduceerd in de deeltjesfysica. Door het introduceren van een symmetrie wordt het vaak makkelijker om een probleem te benaderen. Het is bijvoorbeeld een stuk makkelijker om je weg te vinden op Manhattan dan in het centrum van Rome. Het stratennetwerk van Manhattan is ontworpen als een grid met veel symmetrie, terwijl in Rome alle straten kris-kras door elkaar lopen. In het model van Fendley et al. leidt supersymmetrie tot een aantal bijzondere eigenschappen en vergroot het de mogelijkheden voor theoretische analyse. Hoewel het bestuderen van dit model zeker kan bijdragen aan een beter begrip van materialen waarin de elektronen sterk wisselwerken, is het belangrijk om op te merken dat het een zeer specifiek model is. De elektron-achtige deeltjes zijn bijvoorbeeld geen echte elektronen, maar een soort cartoon voorstelling daarvan. Bovendien is de wisselwerking tussen deze deeltjes op een bepaalde manier gekozen en dus niet heel generiek.

Dit proefschrift beschrijft het model van Fendley et al. voor het geval dat de deeltjes zich bewegen in een vierkant rooster (een grid net zoals ruitjes papier). Dit rooster ontstaat door de (zeer zwakke) wisselwerking van de elektronen met de atoomkernen in het kristalrooster. Het is belangrijk om het vierkante rooster te bestuderen, omdat het in materialen een veel voorkomende kristalstructuur is. We hebben in het bijzonder gekeken naar de toestanden met de laagste energie. Deze zogenaamde grondtoestand bepaalt voor een groot deel de eigenschappen van het materiaal. Voor een skater in een halfpipeline is de laagste energie toestand, de toestand waarin de skater in het midden van de halfpipeline stilstaat. Wanneer er echter heel veel skaters zijn, zodat ze niet meer allemaal in het midden passen, dan wordt het al ingewikkelder om te bepalen wat precies de laagste energie toestand is. Stel nu dat die skaters ook nog hard beginnen te duwen als iemand te dichtbij komt (een soort sterke wisselwerking) dan wordt het nog complexer. In het model dat wij bestuderen is er bovendien nóg een complicatie, de elektronen zijn namelijk kwantummechanische deeltjes, waardoor hun plaats en snelheid niet precies bepaald zijn. Hier biedt de supersymmetrie echter uitkomst: deze zorgt er namelijk voor dat de grondtoestanden gevonden kunnen worden door geavanceerde technieken uit de wiskunde te gebruiken.

Eén van de belangrijkste resultaten van dit proefschrift is het bewijs van een stelling die het lastige, kwantummechanische probleem van het vinden van de grondtoestand van dit model vertaalt naar een veel simpeler probleem. Stel dat de elektronen bewegen in een vierkant rooster van een bepaalde grootte, tien bij tien hokjes bijvoorbeeld, dan zegt de stelling dat het aantal grondtoestanden voor dit geval gevonden kan worden door te tellen op hoeveel mogelijke manieren je dit rooster van tien bij tien hokjes kan betegelen. Voor het maken van een betegeling mogen slechts vier soorten tegels gebruikt worden, deze staan weergegeven op de omslag van dit proefschrift. Verder werkt het net als het betegelen van een badkamer: de tegels mogen niet overlappen en er mogen ook geen spleten tussen zitten. Het vinden van een betegeling en zeker het aftellen van alle mogelijkheden is dus even puzzelen, maar vele malen simpeler dan het oorspronkelijke probleem uit de kwantummechanica. Dit is precies de kracht van de stelling. Bovendien blijkt uit deze

stelling, dat dit model een zeer bijzonder materiaal beschrijft dat niet één unieke grondtoestand heeft, zoals verre weg de meeste materialen, maar eindeloos veel laagste energie toestanden. Dit is een bijzondere vorm van frustratie; de sterke afstotende wisselwerking van de deeltjes zorgt ervoor dat er heel veel manieren zijn waarop de laagste energie bereikt kan worden.

Naast het bewijs van deze stelling, beschrijft dit proefschrift ook een numerieke analyse van de supersymmetrische modellen. Door gebruik te maken van computersimulaties van het model enerzijds, en begrip uit de deeltjesfysica anderzijds, hebben we kunnen aantonen dat het model een materiaal beschrijft dat in bepaalde gevallen zeer goed stroom geleidt. Dit is het geval wanneer het rooster waarop de deeltjes bewegen in één richting heel smal is, waarbij de deeltjes dus eigenlijk op een lijn bewegen. Door deze resultaten te combineren met de stelling voor de grondtoestanden, die niet alleen geldt wanneer de deeltjes op een lijn bewegen, maar ook wanneer ze in het vlak bewegen, kunnen we concluderen dat het model waarschijnlijk een materiaal beschrijft dat nog een bijzondere eigenschap heeft. Niet alleen heeft het materiaal heel veel grondtoestanden, bovendien is het waarschijnlijk zo dat als je een elektrische stroom door het materiaal wil laten lopen, deze stroom niet in het materiaal kan doordringen, maar wel langs de rand kan lopen. Dit is een bijzondere eigenschap die experimenteel voor verschillende materialen, waarin de elektronen sterk wisselwerken, is waargenomen.

De bevindingen in dit proefschrift laten duidelijk zien dat sterke wisselwerking tussen de elektronen inderdaad kan leiden tot bijzondere materiaaleigenschappen. Voor het behalen van deze resultaten was het ontwikkelen van nieuwe technieken essentieel. Of het bestudeerde model ook daadwerkelijk een materiaal beschrijft dat we op een bepaald moment in onze hand kunnen houden (of misschien al eens gehad hebben!) zal nog moeten blijken.